CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL A UMA VARIÁVEL

AULA 2

Prof. Guilherme Lemermeier Rodrigues

CONVERSA INICIAL

Quando pensamos em limites no contexto da matemática, evidentemente na perspectiva no cálculo diferencial e integral, vamos além dessa ideia simples de que limites têm a ver com alguma espécie de “fronteira”, “divisa” entre duas ideias ou conceitos.

Para a disciplina de Cálculo, o estudo de limites está diretamente ligado à ideia de funções, estudo de domínios, análises das lateralidades de um ponto ou região em um gráfico, tendências a valores, e continuidades, entre outros pontos desse estudo.

Enfim, seja bem-vindo(a) a uma matemática mais avançada e a um dos capítulos mais belos dessa ciência exata.

TEMA 1 – DEFINIÇÃO DE LIMITES

Aqui, veremos um conceito importante dentro da disciplina de cálculo diferencial e integral, muito embora o conceito seja inicialmente bem intuitivo, os cálculos apresentados nesta aula têm forte impacto nos conceitos futuros da disciplina.

Nosso estudo da teoria doa limites se iniciara na análise dos limites laterais.

Inicialmente abordaremos a definição clássica de limites como $\lim_{x \to a} f(x) = L$ para então vermos o conceito de limites laterais.

Em Thomas, Harr e Weir (2014, p. 73),

DEFINIÇÃO Seja $f(x)$ definida em um intervalo aberto em torno de x_0, exceto, possivelmente, no próprio x_0. Dizemos que o **limite de $f(x)$ quando x tende a x_0 é o número L**, e escrevemos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

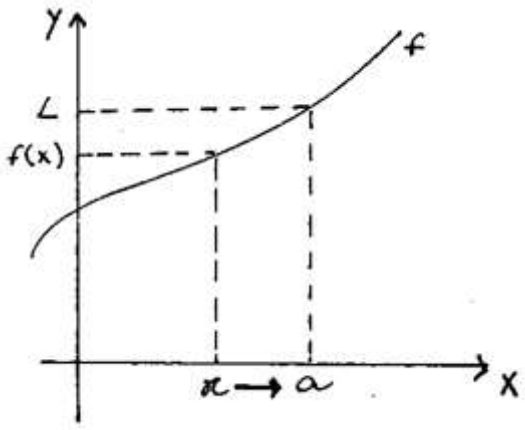
se, para cada número $\epsilon > 0$, existir um número correspondente $\delta > 0$, de modo que, para qualquer valor de x,

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

1.1 Limites Laterais

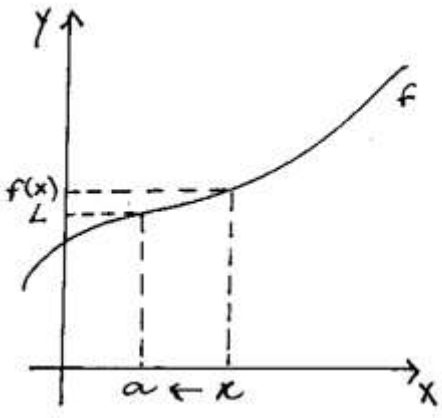
Com base no conceito anterior, os limites laterais são aproximações laterais pela esquerda e pela direita do valor de x o qual o limite tende, isto é, são aproximações laterais do valor que estamos analisando no limite.

Vindo pela esquerda do valor dado:



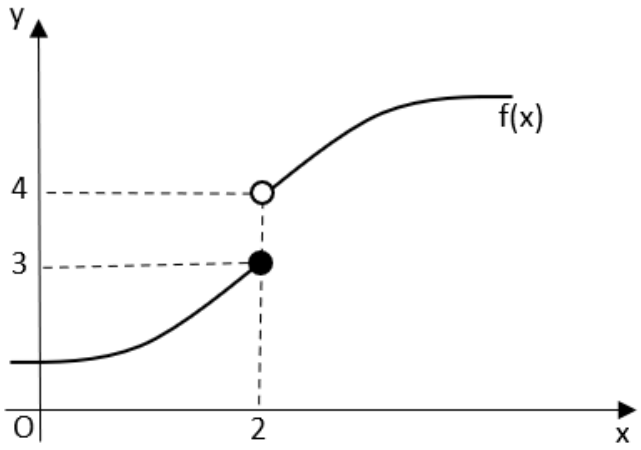
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Vindo pela direita do valor dado:



$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Exemplo 1: Como na definição anteriormente apresentada, responda as questões a seguir relacionadas a função esboçada no gráfico 1.



Calcule:

a) $\lim_{x\to 2^+} f(x) =$

b) $\lim_{x\to 2^-} f(x) =$

c) $\lim_{x\to 2} f(x) =$

TEMA 2 – PROPRIEDADES DOS LIMITES E CÁLCULO

Agora que vimos a definição e a ideia gráfica dos limites, vamos para o cálculo efetivamente algébrico dos limites.

Para isso apresentamos as propriedades de limites:

i. $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

ii. $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$

iii. $\lim_{x\to a}[cf(x)] = c[\lim_{x\to a} f(x)]$

iv. $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

v. $\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, sendo $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

vi. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$

vii. $\lim_{x\to a} c = c$

viii. $\lim_{x\to a} x = a$

ix. $\lim_{x\to a} x^n = a^n$

Exemplo 2. Calcule usando as propriedades o limite abaixo:

$\lim_{x\to 1}\left[\frac{2x^2-3}{3x+1}\right]$.

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{2x^2-3}{3x+1}\right] =$$

$$= \frac{\lim_{x\to 1}[2x^2-3]}{\lim_{x\to 1}[3x+1]} =$$

$$= \frac{\lim_{x\to 1}[2x^2] - \lim_{x\to 1}[3]}{\lim_{x\to 1}[3x] + \lim_{x\to 1}[1]} =$$

$$= \frac{2\left[\lim_{x\to 1}[x]\right]^2 - \lim_{x\to 1}[3]}{3\left[\lim_{x\to 1}[x]\right] + \lim_{x\to 1}[1]} =$$

$$= \frac{2\cdot 1^2 - 3}{3\cdot 1 + 1} =$$

$$= \frac{2-3}{3+1} =$$

$$= \frac{-1}{4} =$$

$$= -\frac{1}{4}$$

2.1 Resolução por substituição direta

Exemplo 3. Calcule o limite abaixo:

$$\lim_{x\to 2}\left[\frac{x^2+2}{2x+1}\right] =$$

Resolução

$$\lim_{x\to 2}\left[\frac{x^2+2}{2x+1}\right]=\frac{2^2+2}{2\cdot 2+1}=$$

$$=\frac{4+2}{4+1}=$$

$$=\frac{6}{5}$$

TEMA 3 – INDETERMINAÇÕES

No cálculo de limites pode ocorrer um resultado inconclusivo em um primeiro momento; assim, chamamos de *indeterminação*. Esse resultado pode ser de vários tipos, entre eles:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 0\times\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty$$

É importante ressaltar que uma indeterminação não significa ausência de resultados, mas o contrário disso. Uma indeterminação é um excesso de resultados (mais de um).

Exemplo 4: Calcule $\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^2-1}{x-1}\right]$.

Resolução:

$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^2-1}{x-1}\right]=\frac{(1)^2-1}{(1)-1}=\frac{0}{0}$ (indeterminação)

Saindo da indeterminação,

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^2-1}{x-1}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}[x+1]=$$

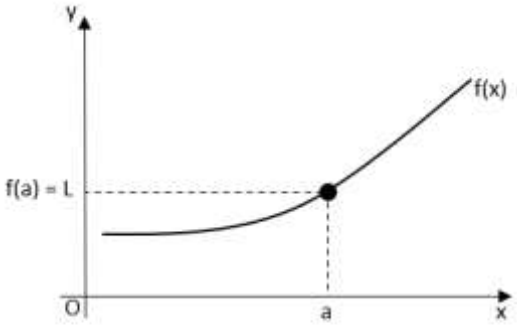
$$=\ 1+1=$$

$$=\ 2$$

TEMA 4 – CONTINUIDADES

Uma função *f* é dita contínua em um número *a* se $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Para termos essa definição é fundamental cumprir três verificações simultaneamente:



$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = L$$

i. f(a) é definido;

ii. $\lim_{x\to a} f(x)$ existe;

iii. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Exemplo 5:

Verifique se a função $f(x) = x + 3$ é contínua em $x = 1$:

Resolução:

i. f(1) é definido;

$f(1) = (1) + 3 = 1 + 3 = 4$

ii. $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe;

$\lim_{x\to 1}[x + 3] = (1) + 3 = 4$

iii. $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

TEMA 5 – ASSÍNTOTAS

Nesse tema estudaremos dois tipos de assíntotas, as verticais e as horizontais.

Os cálculos de ambas envolvem o estudo de domínio de uma função e limites**.**

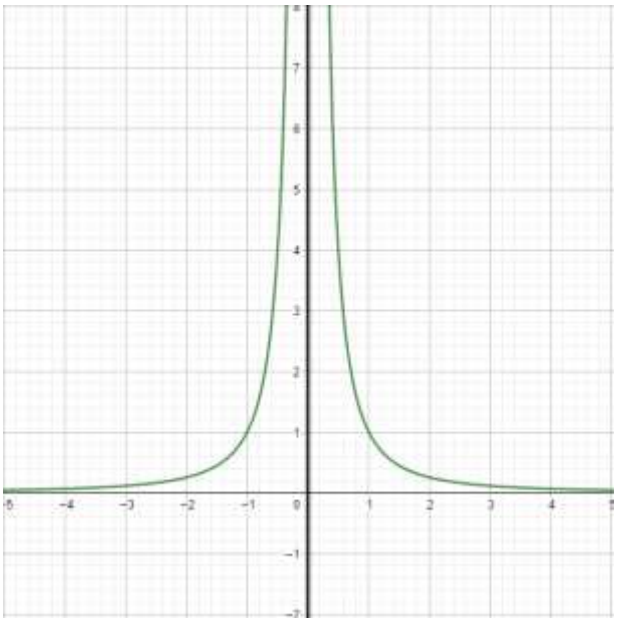
Em vias gerais assíntotas são retas que teriam a tendência de tangenciar uma curva, contudo jamais as tocariam. Podemos dizer que as assíntotas são retas de direcionam o comportamento de alguns tipos de curvas.

5.1 Assíntota vertical

Nesse caso estudamos funções cujos limites tendem ao infinito, isto é, o resultado do cálculo do limite indica um valor conceitual chamado infinito, podendo ser positivo $(+\infty)$ ou negativo $(-\infty)$.

Exemplo 6. Prove que $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\right] = \infty$.

Perceba que se calcularmos de forma direta por substituição teremos um resultado inconclusivo (1/0), contudo se tabelarmos valores que tendem, se aproximam pela esquerda e pela direita do valor 0, teremos a nítida noção de direcionamento do resultado como o gráfico indica.



Sendo $f(x) = \frac{1}{x^2}$, tabelando valores tendendo a $x = 0$.

x	f(x)
-2	0,25
-1	1
-0,5	4
-0,1	100
-0,01	10000
-0,001	1000000
-0,0001	100000000

x	f(x)
2	0,25
1	1
0,5	4
0,1	100
0,01	10000
0,001	1000000
0,0001	100000000

Desta forma, prova-se que $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\right] = \infty$

5.2 Assíntota horizontal

Nesse caso estudamos funções cujo resultado do limite é um número, isto é, o resultado do cálculo do limite indica um valor numérico, porém, extrapolaremos o valor de tendência ao infinito, podendo ser positivo $(+\infty)$ ou negativo $(-\infty)$. Uma assíntota horizontal é uma acomodação do gráfico em torno de uma tendência de valor como imagem.

Exemplo 7. Determine a assíntota horizontal da função $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 1}$.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 1}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} =$$

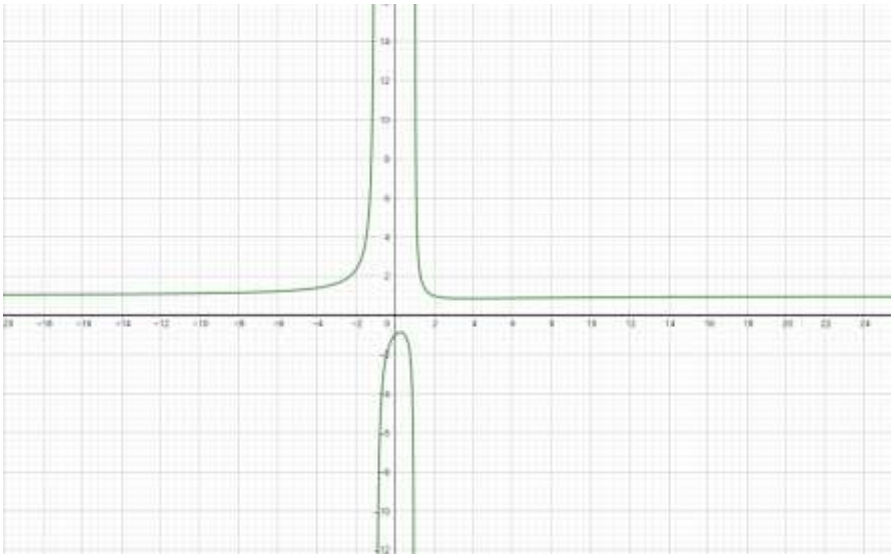
$$= \frac{1 - \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty^2}}{1 - \frac{1}{\infty^2}} =$$

$$= \frac{1 - 0 + 0}{1 - 0} =$$

$$= \frac{1}{1} =$$

$$= 1$$

Graficamente,



Logo, a assíntota horizontal é y=2.

Desta forma podemos simplificar dizendo que a assíntota horizontal é o valor do limite da função quando o x tende ao ∞ ou até mesmo $-\infty$.

FINALIZANDO

Nesta aula você teve acesso a um importante tópico de uma matemática avançada.

O estudo da teoria dos limites é muito importante para as análises gráficas e de funções matemáticas que fazem o dia a dia das ciências exatas quando aplicadas a diversos campos, mas não somente dentro da academia, mas também dentro da estatística, produção industrial, análise de esforços e desempenho de diversos mecanismos, dispositivos e materiais.

Agora chegou sua vez de verificar se os conceitos foram assimilados. Aproveite a lista de exercícios propostos.

Lembre-se que em caso de dúvidas, dê um printscreen ou digitalize o exercício até onde você conseguiu desenvolver e envie no Canal de Tutoria no AVA e logo você obterá a orientação necessária.

Mãos à obra!

REFERÊNCIAS

THOMAS, G. B.; HASS, J.; WEIR, M. D. **Cálculo**: volume 1. 12ª ed. São Paulo: Pearson, 2012.