CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL A UMA VARIÁVEL

AULA 4

Prof. Guilherme Lemermeier Rodrigues

CONVERSA INICIAL

Nesta aula, veremos alguns conceitos teóricos com uma visão prática, com exercícios e dicas ao longo das explicações. Iniciaremos com os estudos das taxas relacionadas, cálculos que são muito usados na física, pois condicionam o cálculo das derivadas em relação ao tempo. Depois, abordaremos a teoria dos pontos críticos, que apresenta ampla aplicação na otimização. A otimização é um conceito muito utilizado para maximizar processos industriais e para minimizar o consumo de insumos nos diversos processos de engenharia e gestão.

TEMA 1 – TAXAS RELACIONADAS I

Uma boa prática das derivadas está na aplicação das taxas relacionadas. Neste tema, partiremos da definição de que uma taxa relacionada é uma derivada de uma função em relação ao tempo $\left(\frac{df}{dt}\right)$.

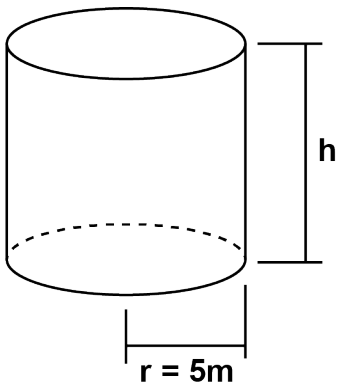
Seu cálculo é um procedimento relativamente simples:

1. Achar uma equação que relacione as grandezas envolvidas.
2. Considerar que as taxas de variação são derivadas em relação ao tempo.

Para entender melhor essa definição, assista ao vídeo, que traz essa ideia por meios gráficos.

Exemplo 1: um tanque de formato cilíndrico tem a geometria representada na Figura 1. Suponha que esse tanque é alimentado à taxa de 5 m³/h. Qual a taxa de aumento da altura do nível da água?

Figura 1 – Tanque cilíndrico



Resolução:

$$\frac{dh}{dt} = ?$$

$$\frac{dV}{dt} = 5\frac{m^3}{h}$$

$$V = \pi r^2 h$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r^2 h)$$

$$\frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \pi 5^2 \frac{dh}{dt}$$

$$5 = 25\pi \frac{dh}{dt}$$

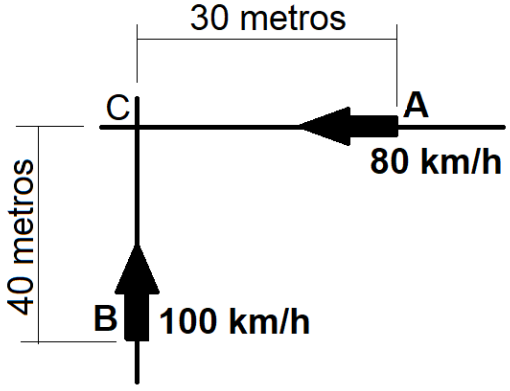
$$\frac{dh}{dt} = 0{,}064\frac{m}{h}$$

Acompanhe essa resolução com explicações detalhadas no vídeo.

TEMA 2 – TAXAS RELACIONADAS II

Exemplo 2: dois veículos estão se aproximando de um cruzamento perpendicular (C), como demonstra a Figura 2. Qual a taxa de aproximação entre eles, considerando que os veículos A e B estão a 30 metros e 40 metros do cruzamento, respectivamente?

Figura 2 – Veículos em cruzamento

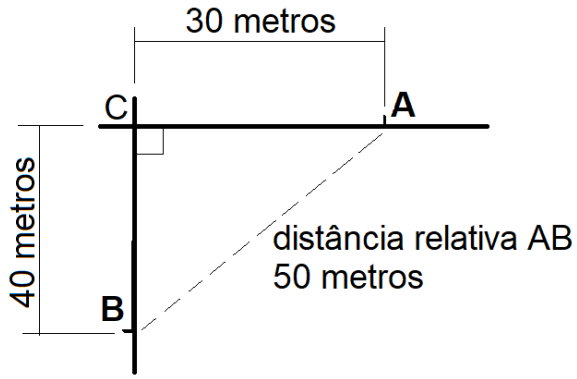


Taxa de aproximação pelo eixo x (veículo A): $\frac{dx}{dt} = -80\frac{km}{h}$ (distância $x = 30metros$).

Taxa de aproximação pelo eixo x (veículo B): $\frac{dy}{dt} = -100\frac{km}{h}$ (distância $y = 40metros$).

Taxa de aproximação ao cruzamento (ponto C): $\frac{dz}{dt} = ?$ (distância relativa $= 50metros$).

Figura 3 – Aproximação



Calculando as taxas de variação em relação ao tempo:

$$z^2 = x^2 + y^2$$

$$\frac{d}{dt}(z^2) = \frac{d}{dt}(x^2 + y^2)$$

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$2 \cdot 0{,}05 \cdot \frac{dz}{dt} = 2 \cdot 0{,}03 \cdot (-80) + 2 \cdot 0{,}04 \cdot (-100)$$

$\frac{dz}{dt} = -128km/h$ (velocidade de aproximação)

Acompanhe a resolução desse exercício no vídeo.

TEMA 3 – PONTOS CRÍTICOS (MÁXIMO E MÍNIMO)

Uma das melhores aplicações da teoria do cálculo, objetivamente, com exceção das derivadas, está nos problemas de otimização.

Por definição, temos a ideia de Valor Máximo Absoluto e Valor Mínimo Absoluto. Vamos considerar que *c* é um número no domínio *D* de uma função *f*.

Então f(c) será:

- Valor Máximo Absoluto de f em D se f(c)≥f(x) para todo x em D.
- Valor Mínimo Absoluto de f em D se f(c)≤f(x) para todo x em D.

Esses pontos, pela própria definição, também são chamados de *valores extremos da função*.

Entretanto, se limitarmos a função ao um intervalo seguindo a mesma analogia anterior, adicionando o detalhe de um intervalo de análise no domínio da função, e consequentemente na imagem, podemos nos deparar com Valor Máximo Local e Valor Mínimo Local.

Em casos de análise de valores de máximo e mínimo, faremos alguns passos simples:

1. Calcular a primeira derivada f'(x).
2. Igualar a zero a primeira deriva, f'(x) = 0, pontos críticos.
3. Calcular a segunda derivada f''(x). E verificar junto a segunda derivada substituindo os pontos críticos.

Exemplo 3: Determine o(s) ponto(s) críticos da função:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

Igualando a zero para se obter os pontos críticos:

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

Simplificando tudo por 3 para facilitar o cálculo:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Usando a Fórmula Quadrática (Bhaskara) para calcular as raízes:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 3$$

Calculando a segunda derivada:

$$f''(x) = 6x - 12$$

Agora, substituímos os valores dos pontos críticos na derivada segunda:

$x_1 = 1 \rightarrow f''(1) = 6 \cdot (1) - 12 = 6 - 12 = -6$ (ponto de máximo).

$x_2 = 3 \rightarrow f''(3) = 6 \cdot (3) - 12 = 18 - 12 = 6$ (ponto de mínimo).

Substituindo os valores de x_1 e x_2 na função original, teremos os valores de y que compõem as coordenadas cartesianas dos pontos de máximo e mínimo:

- $x_1 = 1 \rightarrow y_1 = 3$, portanto, o ponto de máximo é $P_{Máx}(1,3)$.
- $x_2 = 3 \rightarrow y_2 = -1$, portanto, o ponto de máximo é $P_{Mín}(3,-1)$.

Assista à resolução detalhada desse exercício no vídeo.

TEMA 4 – PONTO DE INFLEXÃO

Um ponto *P* é chamado *ponto de inflexão* se *f* contínua no ponto e a curva mudar de côncavo para cima para côncavo para baixo ou vice-versa em *P*. Em suma, graficamente, quando há uma mudança na tendência de movimento.

Exemplo 4: determine o ponto de inflexão da função:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

Calculando a segunda derivada:

$$f''(x) = 6x - 12$$

Agora, igualamos a derivada segunda para obtermos o ponto de inflexão:

$$6x - 12 = 0$$

$$6x = 12$$

$$x = 2$$

Substituindo na função original, temos que $y = 3$.

Portanto, o ponto de inflexão é I(2, 3).

Acompanhe também o vídeo da resolução desse exercício.

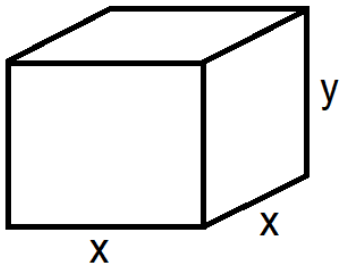
TEMA 5 – OTIMIZAÇÃO

A otimização é a aplicação prática da teoria dos pontos de máximo e mínimo. Nessa prática, podemos ver como o conceito de pontos críticos tem aplicação em diversos campos das engenharias. Afinal, com esse cálculo busca-

se otimizar, maximizar ou minimizar, os processos e o consumo de insumos, sendo assim amplamente utilizado nas engenharias e gestão.

Exemplo 5: uma caixa de base quadrada, sem tampa, deve ter 1 m³ de volume. Determine as dimensões que exigem o mínimo de material. Despreze a espessura do material e as perdas na construção da caixa.

Figura 3 – Caixa de base quadrada



Volume = x·x·y = x²y

$$\begin{cases} x^2y = 1 \\ A = x^2 + 4xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2y = 1 \rightarrow y = \dfrac{1}{x^2} \\ A = x^2 + 4xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2y = 1 \rightarrow y = \dfrac{1}{x^2} \\ A = x^2 + 4xy \rightarrow A(x) = x^2 + 4x.\dfrac{1}{x^2} \end{cases}$$

Calculando a primeira derivada da função:

$$A(x) = x^2 + 4x^{-1}$$

$$A'(x) = 2x - 4x^{-2}$$

Igualando a zero para calcular os pontos críticos:

$$A'(x) = 0$$

$$2x - 4x^{-2} = 0$$

$$2x - \frac{4}{x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad 2x^3 - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad 2x^3 = 4 \quad \rightarrow \quad x^3 = 2 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt[3]{2}$$

$$\cong 1{,}26\text{m}$$

Substituindo o valor de x para ter o valor de y:

$$y = \frac{1}{x^2} \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2} \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{1{,}5874} \quad \rightarrow \quad y \cong 0{,}63\text{m}$$

Portanto, os valores de resposta que preenchem as condições do enunciado são:

$$x \cong 1{,}26\text{m e y} \cong 0{,}63\text{m}$$

Veja a explicação detalhada da resolução desse exercício no vídeo.

FINALIZANDO

Nesta aula, tivemos a oportunidade de usar conceitos teóricos com uma visão prática, o que nos ajuda a desenvolver uma visão mais ampla e significativa do cálculo dentro dos processos, sejam eles nas engenharias ou na gestão.

Como visto, as taxas relacionadas são muito usadas na física, pois condicionam o cálculo das derivadas em relação ao tempo, trazendo a variável tempo para dentro do cálculo.

A teoria dos pontos críticos tem aplicação ampla na otimização. Esse conceito é muito utilizado para maximizar processos industriais e para minimizar o consumo de insumos nos diversos processos das engenharias e gestão, de modo que influencia diretamente as tomadas de decisões dos profissionais envolvidos.

REFERÊNCIAS

THOMAS, G. B.; HASS, J.; WEIR, M. D. **Cálculo**. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012. v. 1.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A**: funções, limite, derivação, integração. 6. ed. São Paulo: Pearson, 2006.