CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL A UMA VARIÁVEL

AULA 5

Prof. Guilherme Lemermeier Rodrigues

CONVERSA INICIAL

Nesta aula, iniciaremos os estudos das integrais de forma direta utilizando pouca teoria e com alguns exercícios.

O entendimento dos conceitos que serão apresentados nesta aula é fundamental, pois diversas disciplinas se utilizam das integrais para demonstrar matematicamente os fenômenos físicos estudados.

Enfim, mãos à obra!

TEMA 1 – INTEGRAIS: DEFINIÇÃO

Partiremos do princípio de que o cálculo da integral indefinida pode ser tratado como o cálculo de uma antiderivada, isto é, aplicaremos a ideia de que uma integração é o cálculo inverso de uma derivação.

Sendo assim, uma função, ao ser integrada, de forma simples, significa que ela voltará ao seu formato primitivo, antes de ter sido derivada.

Para melhor entender essa definição, assista ao vídeo a seguir em que demonstraremos essa ideia.

Exemplo 1: calcule a função primária de f(x) = x + 1.

Resolução:

Sendo f(x) = x + 1 uma função resultado de uma derivação, então sua primitiva, isto é, sua antiderivada será:

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + C$$

Acompanhe essa resolução com explicações detalhadas no vídeo.

Desta forma, podemos definir que uma integral de uma função *f(x)* é a antiderivada dela. Portanto,

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Em que:

- f(x) é a função a ser integrada (integrando);
- d(x) é a variável de integração;
- C é constante de integração.

Assim, seguindo a simbologia, passamos a chamar $\int f(x)dx$ de a integral indefinida de f(x).

Acompanhe essa explicação no vídeo.

TEMA 2 – INTEGRAÇÕES ELEMENTARES

Agora que fomos iniciados na simbologia e na ideia de família de integração, veremos alguns exemplos buscando um elemento comum no procedimento, portanto, é fundamental muita atenção ao método.

Exemplo 2: calcule as integrais a seguir e estabeleça uma formulação do método utilizado.

a) $\int(x)dx = ?$

Resolução:

$$\int(x)dx = \frac{x^2}{2} + C$$

b) $\int(2x)dx = ?$

Resolução:

$$\int(2x)dx = 2 \cdot \int(x)\,dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + C = x^2 + C$$

Assim, estabelecemos a formulação de uma importante regra chamada *regra da potência* para integração indefinida:

$$\int(x^n)dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Acompanhe a resolução desse exemplo no vídeo.

Exemplo 3: calcule a integral $\int(x - 2)^2 dx$.

Resolução:

$$\int(x-2)^2 dx =$$

$$= \int(x^2 - 4x + 4)dx =$$

$$= \int(x^2)dx - \int(4x)dx + \int(4)dx =$$

$$= \int (x^2)dx - 4\int (x)dx + \int (4)dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 4x + C =$$

$$= \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x + C$$

Acompanhe a resolução desse exemplo no vídeo.

Exemplo 4: calcule a integral $\int \left[\frac{x^2+1}{x^2}\right] dx$.

Resolução:

$$\int \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) dx =$$

$$= \int (1 + x^{-2})dx =$$

$$= \int (1)dx + \int (x^{-2})\, dx =$$

$$= x + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C =$$

$$= x + \frac{x^{-1}}{-1} + C =$$

$$= x - x^{-1} + C =$$

$$= x - \frac{1}{x} + C$$

Acompanhe a resolução desse exemplo no vídeo.

Exemplo 5: calcule a seguinte integral indefinida $\int (\sqrt[3]{x^2})\mathrm{dx}$.

Resolução:

$$\int (\sqrt[3]{x^2})\mathrm{dx} =$$

$$= \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C =$$

$$= \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C =$$
$$= \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C =$$
$$= \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + C$$

Acompanhe a resolução desse exemplo no vídeo

Um ponto importante a ser destacado é que, assim como no cálculo de derivadas, as integrais contam com um formulário para auxiliar nos cálculos, que pode ser encontrado em materiais complementares.

Exemplo 6: calcule a seguinte integral indefinida $\int (3x^2 + \cos x)dx$.

Resolução:

$$\int (3x^2 + \cos x)dx =$$
$$= \int (3x^2)dx + \int (\cos x)dx =$$
$$= 3 \cdot \int (x^2)dx + \int (\cos x)dx =$$
$$= \frac{3x^3}{3} + senx + C =$$
$$= x^3 + senx + C$$

Acompanhe a resolução desse exemplo no vídeo.

TEMA 3 – TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

O teorema fundamental do cálculo é o início da aplicação prática das integrais, pois é nele que, basicamente, é feito o uso do cálculo em diversas disciplinas. Portanto, é extremamente importante a sua compreensão.

O teorema é uma extensão do que já vimos no cálculo de integrais indefinidas, e é por isso que podemos adotar a nomenclatura de *integrais definidas* para esse cálculo.

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]|_a^b = F(b) - F(a)$$

Portanto:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Em que *a* e *b* são os limites de integração, sendo:

a = limite inferior de integração.

b = limite superior de integração.

Acompanhe o exemplo a seguir. Ele demonstrará detalhadamente essa ideia.

Exemplo 7: calcule a integral definida $\int_0^1 (\mathrm{x}+2)\mathrm{dx}$.

Resolução: calcular a integração normalmente, porém, por se tratar de uma integração definida, não precisaremos da constante C.

$$\int_0^1 (\mathrm{x}+2)\mathrm{dx} =$$
$$= (\frac{x^2}{2}+2x)|_0^1 =$$
$$= \left(\frac{1^2}{2}+2\cdot 1\right) - \left(\frac{0^2}{2}+2\cdot 0\right) =$$
$$= \frac{1}{2}+2 =$$
$$= \frac{1+4}{2} =$$
$$= \frac{5}{2}$$

Assista à resolução detalhada desse exemplo no vídeo.

TEMA 4 – INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

Por vezes, não é possível calcular uma integral de forma direta, mas isso não nos impede de fazer o cálculo.

Uma das técnicas mais usadas é a integração por substituição. Essa técnica se resume basicamente a substituir a função por outra mais simples.

Teoricamente, temos:

Se F é uma antiderivada de f, então:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = F[g(x)] + C$$

Se $u = g(x)$ e $du = g'(x)dx$, então:

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

Veja, nos exemplos a seguir, a ideia dessa aplicação.

Exemplo 8: calcule $\int_0^2 (\sqrt{2x+1})dx$.

Resolução:

Fazendo a substituição:

$$u = 2x + 1$$

$$\frac{du}{dx} = 2 \quad \rightarrow \quad du = 2dx$$

Detalhe importante:

- Sendo x = 2, então, u = 5
- Sendo x = 0, então, u = 1

Dessa forma, adequando a integral original (em negrito):

$\int_0^2 (\sqrt{2x+1})dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 (\sqrt{2x+1}) \cdot \mathbf{2}dx$, substituindo:

$$\frac{1}{2} \cdot \int_1^5 (\sqrt{u})du =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_1^5 (u^{\frac{1}{2}})du =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(u)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} |_1^5 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(u)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} |_1^5 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{u^3} |_1^5 =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\sqrt{5^3} - \sqrt{1^3} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} (5\sqrt{5} - 1)$$

Acompanhe o vídeo para resolução desse exemplo.

Exemplo 9: calcule $\int_0^1 e^{3x}\,dx$.

Resolução:

$$\int_0^1 e^{3x}\,dx$$

$u = 3x$

$du = 3dx$

$\begin{cases} x = 1 \rightarrow u = 3 \\ x = 0 \rightarrow u = 0 \end{cases}$

Temos que:

$$\frac{1}{3}\int_0^1 e^{3x}3\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 e^{u}\,du =$$

$$= \frac{1}{3}e^{u}\Big|_0^3 =$$

$$= \frac{1}{3}(e^3 - e^0) =$$

$$= \frac{1}{3}(e^3 - 1)$$

Acompanhe o vídeo para resolução desse exemplo.

TEMA 5 – INTEGRAÇÃO POR PARTES

A técnica da integração por partes é utilizada quando não conseguimos uma integração direta e nem uma integração por substituição.

De forma mais direta, a integração por partes surge quando temos duas funções sem elos comuns dentro de uma integral. Assim, temos a seguinte fórmula para sua aplicação:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Veja aplicação dessa fórmula no exemplo a seguir.

Exemplo 10: calcule $\int x \cdot e^x\,dx$.

Resolução:

$$\int x \cdot e^x\,dx$$

u = x, assim $\frac{du}{dx} = 1 \quad \rightarrow \quad du = 1 \cdot dx$

dv = e^x, assim $v = \int e^x \, dx \quad \rightarrow \quad v = e^x$

Usando a fórmula de integração por parte:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Temos que:

$$\int x \cdot e^x \, \mathrm{dx} = x \cdot e^x - \int e^x \cdot 1 \cdot dx$$

Desta forma:

$$\int x \cdot e^x \, \mathrm{dx} = x \cdot e^x - \int e^x \, dx$$

$$\int x \cdot e^x \, \mathrm{dx} = x \cdot e^x - e^x$$

Portanto, a resposta é:

$$\int x \cdot e^x \, \mathrm{dx} = e^x(x - 1) + C$$

Acompanhe o vídeo para resolução e dicas desse exemplo.

FINALIZANDO

Nesta aula, vimos o importante conceito de cálculo de integrais. Foram apresentadas de forma direta as integrações indefinida e definida, bem como técnicas de integrações.

Enfim, esta aula é uma pedra fundamental e importante para o desempenho e entendimento nas disciplinas que se seguirão em seus estudos.

REFERÊNCIAS

THOMAS, G. B.; HASS, J.; WEIR, M. D. **Cálculo**: Volume 1. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A**: funções, limite, derivação, integração. 6. ed. São Paulo: Pearson, 2006.