MATEMÁTICA DISCRETA

AULA 4

Profª Thamara Petroli

CONVERSA INICIAL

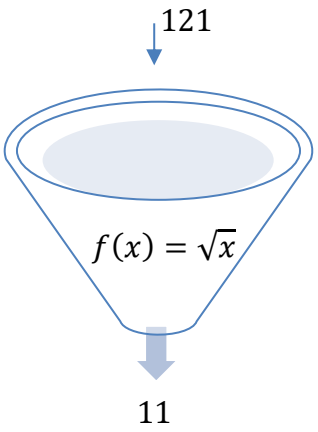
Funções

Na aula anterior basicamente dois temas foram tratados: técnicas de demonstração e relações. Esta aula tratará sobre um tipo de relação muito conhecido na Matemática, e acredito que você não só ouviu falar sobre, mas também já o estudou; e essa relação é dada a partir de funções.

Dessa maneira, esta aula terá como objetivo principal relembrar os principais conceitos sobre funções. Além disso, apresentaremos uma introdução sobre estruturas algébricas.

TEMA 1 – FUNÇÕES

Intuitivamente é possível pensar no conceito de funções como uma máquina. Nessa máquina introduz-se um número, passa-se por processo e sai uma resposta.



Um exemplo claro dessa associação é a calculadora: as funções pré-programadas na calculadora são exemplos de funções que funcionam como máquinas. Por exemplo, a tecla de raiz quadrada: Pressionando a tecla $\sqrt{\ }$ ou $\sqrt{x}$ e fornecendo um valor para x. Se $x < 0$, a calculadora indicará um erro, pois x não podemos tirar a raiz de números negativos, não sendo uma entrada aceitável. Se $x > 0$, então uma aproximação de $\sqrt{x}$ aparecerá.

No nosso dia a dia lidamos com esse conceito de funções de maneira bastante intuitiva, diria até implícita, de maneira que não nos damos conta que estamos lidando com ela, por exemplo, o imposto sobre o preço da venda de gasolina, a temperatura de ebulição da água dada uma certa altitude, o tempo

de viagem de carro dada a velocidade, a área de um apartamento dada as medidas... Observe que em todos esses exemplos uma coisa depende da outra, e não só isso, elas estão relacionadas de alguma forma.

Pensar em função como uma relação é uma outra forma de contextualizar esse conceito, no caso da calculadora relaciona os dados de entrada com os dados de saída, já no preço final da gasolina temos a dependência do imposto, a temperatura da ebulição e a altitude. Não só existe uma relação entre os termos, mas também uma dependência entre eles, que um depende do outro.

Se relembrarmos a aula anterior que tratou sobre relações, podemos verificar que uma relação é um conjunto de pares ordenados. Assim podemos definir o conceito de função como:

- "Uma relação f é chamada de função desde que $(a,b) \in f$ e $(a,c) \in f$ impliquem em $b = c$."

Outra maneira de definirmos uma função, que acreditamos ser a mais popular, é:

- "Dizemos que uma relação f é sobre os conjuntos A e B, é uma função de A para B, $\mathrm{f}: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$, se, e somente se, para todo $\mathrm{a} \in \mathrm{A}$, existe exatamente um $\mathrm{b} \in \mathrm{B}$, tal que $(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \in \mathrm{f}$".

  Vejamos alguns exemplos:

- A relação $f = \{(1,20), (2{,}30), (3,40)\}$ é uma função do conjunto $A = \{1,2,3\}$ ao conjunto $B = \{20,30,40\}$, $f: A \to B$.
- A relação $f = \{(abacaxi, R\$4.00), (maçã, R\$1.99), (melancia, R\$1.99), (limão, R\$3.99), (mamão, R\$4.50)\}$ é uma função do conjunto das frutas $A = \{abacaxi, maçã, melancia, limão, mamão\}$ ao conjunto dos preços $B = \{R\$4.00, R\$1.99, R\$1.99, R\$3.99, R\$4.50\}$, denotado $f: A \to B$.

Seja $A = \{0{,}1, 2, 3\}$ e $B = \{-1, -2\}$, a relação $f = \{(1,-1), (2,-2)\}$, não é uma função de A, para B, pois por definição todo elemento de A deve ser relacionado com um elemento de B, e aqui os valores 0 e 3, não estão relacionados com ninguém.

- A relação $f = \{(x, x^2); x \in \mathbb{Z}\}$ é uma função do conjunto $\mathbb{Z}$ ao conjunto $\mathbb{N}$.
- A relação $f = \{(x^2, x); x \in \mathbb{Z}\}$ é uma não é função do conjunto $\mathbb{N}$ ao conjunto $\mathbb{Z}$, pois existem elementos como $x^2 = 3 \in \mathbb{N}$ que não tem um par tal que $x \in \mathbb{Z}$. E mais, se tomarmos o elemento $x^2 = 1 \in \mathbb{N}$, temos que $x =$

$1 \in \mathbb{Z}$ ou $x = -1 \in \mathbb{Z}$, são possíveis pares, $(1,1)$ ou $(1,-1)$, o que de acordo com a nossa definição (a primeira que citamos) não caracteriza essa relação como função.

Na Matemática é muito comum encontrarmos funções com expressões algébricas, e não apenas uma relação entre dois objetos. Como no exemplo, em que $f = \{(x, x^2); x \in \mathbb{Z}\}$, podemos escrever essa função como $f(x) = x^2$, onde a segunda coordenada é na verdade a expressão da função.

Como uma função é uma relação, e as relações são dadas em pares ordenados, é muito comum utilizarmos a tabela a seguir como uma forma de representar uma função, vejamos um exemplo em que a função é dada pela expressão $f(x) = x^2$.

Tabela 1 – Forma de representar uma função

x	$f(x)$
$\vdots$	$\vdots$
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
$\vdots$	$\vdots$

Fonte: elaborada pela autora.

Além disso, sendo uma função é um caso particular de uma relação, elas absorvem todas as propriedades que uma relação tem!

1.1 Domínio, contradomínio e imagem

Quando discutimos sobre uma possível analogia do conceito de funções, tratando-a como uma máquina, falamos que deveríamos inserir alguns dados de entrada, para então termos nossos resultados, ou dados de saída. Esses conceitos têm nomes específicos *domínio* e *imagem*, definidos a seguir.

Assim seja f uma função. O conjunto de todos os primeiros elementos dos pares ordenados de f é chamado de *domínio de* f, denotando por $Dom(f)$. Ainda podemos definir como:

$$Dom(f) = \{a; \exists b, (a, b) \in f\}$$
$$Dom(f) = \{a: f(a) está\ definido\}$$

Agora, o conjunto de todos os segundos elementos dos pares ordenados de f é chamado de *imagem de* f, denotado por $Im(f)$. Ou podemos definir como:

$$Im(f) = \{b: \exists a, (a, b) \in f\}$$
$$Im(f) = \{b: b = f(a)\ para\ algum\ a\}$$

Não necessariamente a imagem coincidirá com o conjunto B, esse conjunto é chamado de *contradomínio*, ou seja, $Im(f) \subseteq B$.

Assim se a função é dada por $f: A \to B$, o conjunto A será seu domínio, $Dom(f) = A$.

Já o conjunto B é contradomínio da função, $CDom(f) = B$, de maneira que $Im(f) \subseteq B$.

Dos exemplos que vimos anteriormente...

- Dada a função $f = \{(1, 20), (2,30), (3, 40)\}$: temos o $Dom(f) = \{1, 2, 3\}$ e $Im(f) = \{20, 30, 40\}$.
- Dada a função $f = \{(abacaxi, R\$4.00), (maçã, R\$1.99), (melancia, R\$1.99)$ $(limão, R\$3.99),\ (mamão, R\$4.50)\}$ segue $Dom(f) = \{abacaxi, maçã,$ $melancia, limão, mamão$ e $Im(f) = \{R\$4.00, R\$1.99, R\$1.99, R\$3.99,$ $R\$4.50\}$.
- Seja $f = \{(x, x^2); x \in \mathbb{Z}\}$, então $Dom(f) = \mathbb{Z}$ e $Im(f) = \mathbb{N}$. Aqui poderíamos escrever $f(x) = x^2$, onde $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, com $Dom(f) = \mathbb{Z}$, $CDom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{N}$.

Exemplo: considerando a função cosseno,

$$f(x) = \cos x$$

Sabemos que ela é uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com domínio e contradomínio os números reais. Entretanto a sua imagem é limitada no intervalo $[-1, 1] = \{x \in \mathbb{R}: -1 \leq x \leq 1\}$, note que $Im(f) = [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$.

Exemplo: considerando a função cosseno,

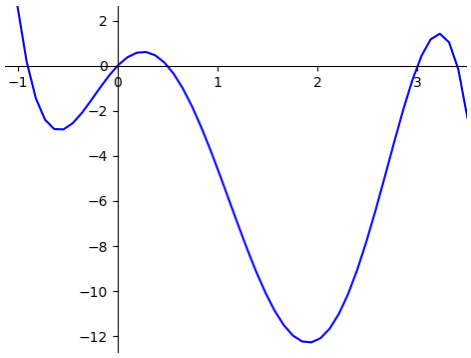
$$f(x) = x^2$$

Ela é uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com domínio e contradomínio os números reais. Entretanto a sua imagem é limitada no intervalo $[0, \infty] = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}$, onde $Im(f) = [0, \infty] \subseteq \mathbb{R}$.

1.2 Gráficos de funções

Os gráficos de funções têm por objetivo visualizar essas funções não algebricamente, possibilitando estudar o comportamento das funções sem precisarmos calcular os valores da função ponto a ponto.

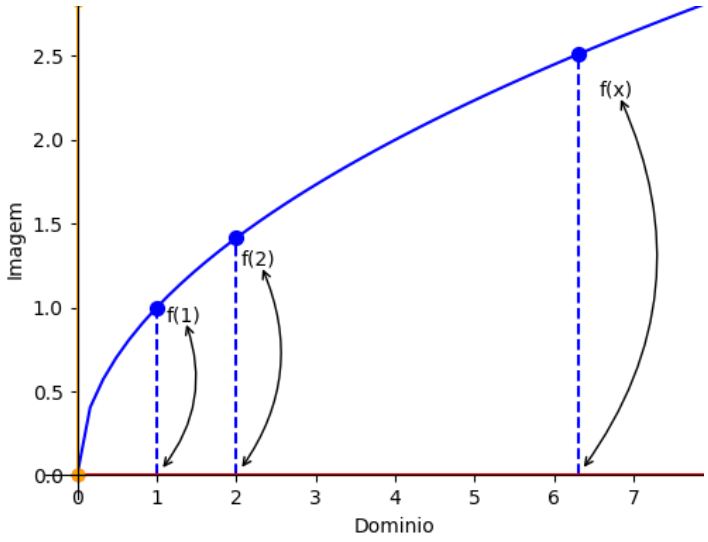
Gráfico 1 – Gráfico de função



Fonte: elaborado pela autora.

Por exemplo, da figura acima sabemos que esta é uma função ímpar, polinomial de grau 5 (cinco).

Gráfico 2 – Gráfico de função

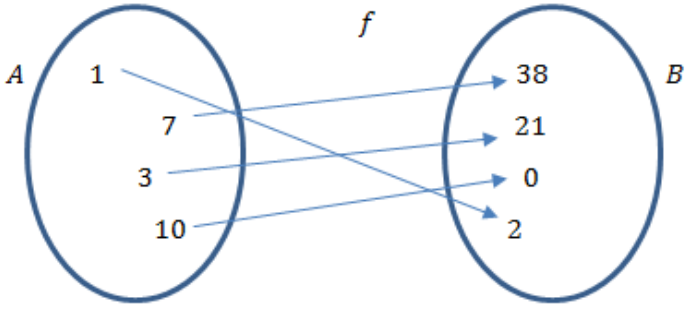


Fonte: elaborado pela autora.

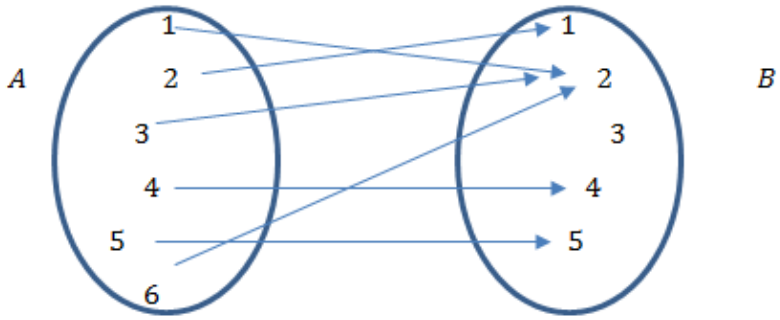
Formalmente, podemos dizer que o gráfico de uma função é o conjunto $\{(x, y): y = f(x)\}$, i.e., é o conjunto dos pares ordenados (x, y), onde $y = f(x)$. Ainda nele, podemos identificar o domínio, o contradomínio e a imagem, como representado no gráfico 2.

Outra forma de representarmos uma função é por meio do *Diagrama de Venn*, também conhecido como *diagrama de flechas*, diagrama esse que conecta os elementos do domínio com a sua respectiva imagem.

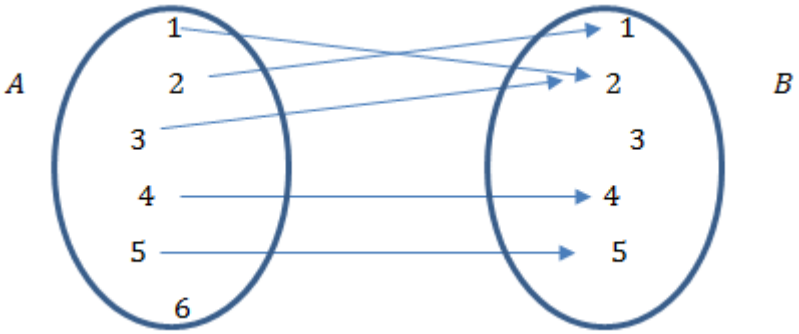
Vejamos alguns exemplos...



Aqui temos a função $f: A \to B$, dada por $\{(1,2), (7, 38), (3, 21), (10, 0)\}$. Agora se dada a função $f: A \to B$, tal que $f = \{(1,2), (2, 1), (3, 2), (4, 4), (5,5), (6,2)\}$, o diagrama é dado como



Se considerássemos $f: A \to B$, tal que $f = \{(1,2), (2, 1), (3, 2), (4, 4), (5,5)\}$, o diagrama é dado como



Basicamente a mesma função, certo? Errado! Pois segundo a nossa definição de função, todos os elementos do conjunto A devem estar relacionados com algum elemento do conjunto B. Logo, esse exemplo, não é uma função!

Na Matemática Discreta, estamos interessados em funções que relacionam conjuntos finitos, como $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$. Assim, quando plotamos o gráfico para apenas alguns pontos, o gráfico pode não fazer muito sentido, ou não terá um aspecto muito agradável. Então é muito comum encontrarmos essa abordagem com diagramas quando queremos representar uma função.

1.3 Contagem de funções

Sejam A e B conjuntos finitos, com cardinalidade (número de elementos) $n(A) = a$ e $n(B) = b$. O número de funções de A para B é b^a.

O que queremos dizer com "número de funções"? Vamos pensar de maneira prática: suponhamos que $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, a\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, \dots, b\}$, sem perda de generalidade, ou seja, os número literalmente representam o "número do elemento". Sabemos que toda função $f: A \to B$ pode ser escrita como:

$$f = \{(1, ?), (2, ?), (3, ?), \dots (a, ?)\}.$$

Em que os pontos de interrogação representam algum elemento do conjunto B, então a pergunta que cabe aqui é: de quantas maneiras podemos preencher esses pontos de interrogação, com os elementos de B? Considerando todas as possibilidades, a resposta é b^a.

Por exemplo: sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{x, y\}$. Determine o conjunto de todas as funções $f: A \to B$.

De acordo com a definição que acabamos de ver ela seria b^a, onde $a = n(a)$ e $b = n(B)$, então $a = 3$ e $b = 2$, então $b^a = 2^3 = 8$. E de fato, fazendo as possíveis combinações dos elementos, podemos encontrar as funções:

$$f_1 = \{(1, x), (2, x), (3, y)\}$$
$$f_2 = \{(1, x), (2, x), (3, x)\}$$
$$f_3 = \{(1, x), (2, y), (3, y)\}$$
$$f_4 = \{(1, x), (2, y), (3, x)\}$$
$$f_5 = \{(1, y), (2, x), (3, y)\}$$
$$f_6 = \{(1, y), (2, x), (3, x)\}$$
$$f_7 = \{(1, y), (2, y), (3, y)\}$$

$$f_8 = \{(1, y), (2, y), (3, x)\}$$

TEMA 2 – CARACTERÍSTICAS DE FUNÇÕES

Existem algumas propriedades de funções que as tornam “especiais”, e o que quero dizer com isso? Quero dizer que essas funções são muito mais que simples funções; são funções das quais podemos ficar “andando” entre os domínios, isso só é possível porque elas são bem definidas.

2.1 Função injetora, sobrejetora e bijetora

Dizemos que uma função $f: A \to B$ é **injetora** se, e somente se,

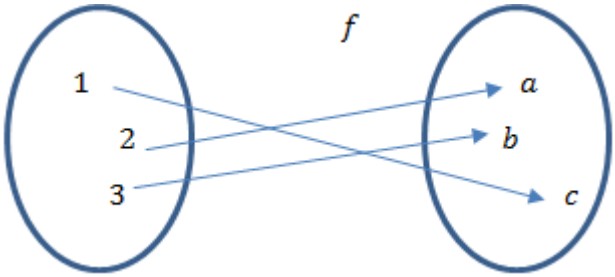
$$\forall x, y \in A;\ f(x) = f(y) \leftrightarrow x = y$$

Ou seja, para quaisquer elementos $x, y \in A$, suas imagens só serão iguais, $f(x) = f(y)$ se, e somente se, $x = y$. Portanto, f é uma função injetora. Alternativamente, a função $f: A \to B$ é **injetora** se, e somente se,

$$\forall x, y \in A;\ f(x) \neq f(y) \leftrightarrow x \neq y$$

Podemos fazer uma releitura dessa definição, onde a função só será injetora se ela atribui um valor diferente par cada elemento do domínio. Esse tipo de função também é conhecido como função *um para um.*

Exemplo: seja $f: \{1,2,3\} \to \{a, b, c\}$, tal que



Claramente é uma função injetora!

Exemplo: dada a função $f(x) = x + 1$, definida $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ela é injetora?

Vamos utilizar a definição para mostrar que essa função é, sim, injetora. Tomando $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, vamos supor que $f(x_1) = f(x_2)$, pela definição da f:

$$f(x_1) = f(x_2) \leftrightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \leftrightarrow x_1 = x_2 + 1 - 1 \leftrightarrow x_1 = x_2$$

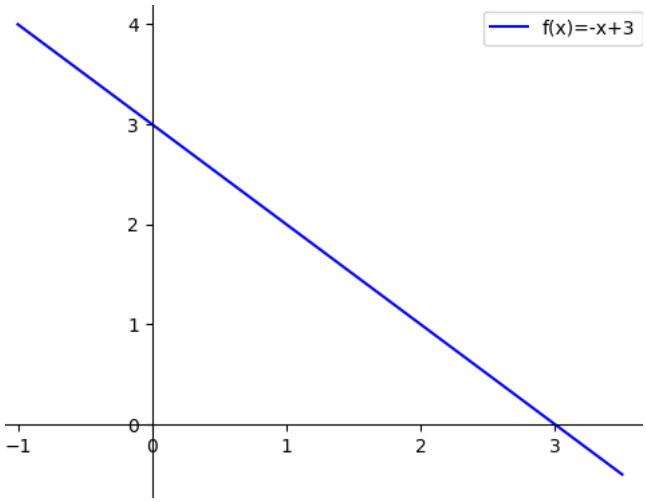
Como queríamos!

Exemplo: seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; onde $f(x) = x^2$. É injetora?

Essa função não é injetora, pois se tomarmos, por exemplo, $x_1 = -1$ substituindo na função $f(x_1) = f(-1) = (-1)^2 = 1$ e $x_2 = 1$ segue $f(x_2) = f(1) = (1)^2 = 2$, ou seja, temos que $x_1 \neq x_2$, mas $f(x_1) = f(x_2)$. Contradizendo a definição.

Funções injetoras ainda apresentam a característica de ser *estritamente crescente* ou *estritamente decrescente*, lembrando que uma função é estritamente crescente se $\forall x, y$ então $x < y \rightarrow f(x) < f(y)$; e é ela estritamente decrescente se $\forall x, y$, então $x > y \rightarrow f(x) < f(y)$. A seguir, alguns exemplos de funções injetoras que apresentam essas propriedades.

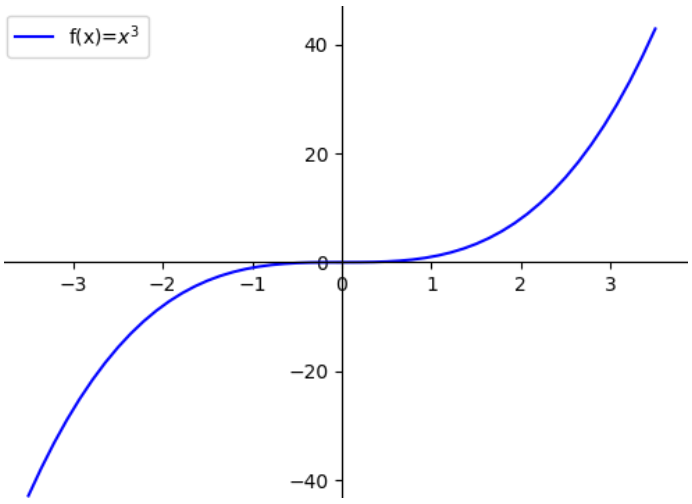
Gráfico 3 – Gráfico da função $f(x) = -x + 3$



Fonte: elaborado pela autora.

$f(x) = -x + 3$ é uma função estritamente decrescente.

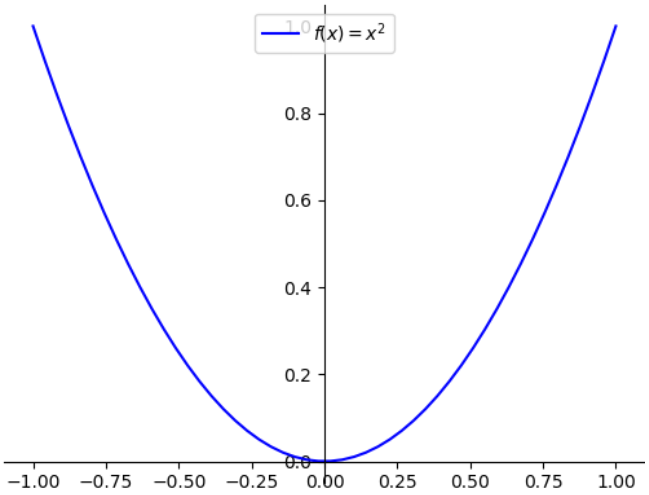
Gráfico 4 – Gráfico da função $f(x) = x^3$



Fonte: elaborado pela autora.

$f(x) = x^3$ é uma função estritamente crescente.

Gráfico 5 – Gráfico da função $f(x) = x^2$



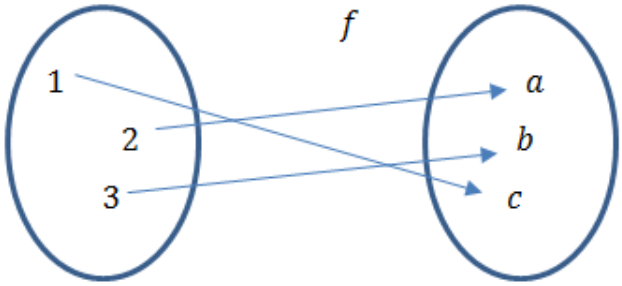
Fonte: elaborado pela autora.

$f(x) = x^2$ além dela não ser injetora, como vimos, ela não é estritamente crescente ou decrescente. Mas ela é decrescente até o ponto $x = 0$, e a partir dele ela é crescente.

Para algumas funções, o contradomínio e a imagem são iguais. Ou seja, todo elemento do contradomínio é associado, ou é a imagem de algum elemento do domínio. Funções que apresentam essa propriedade são chamadas de **funções sobrejetoras**.

- Dizemos que uma função $f: A \to B$ é sobrejetora se, e somente se, $\forall y \in B$, $\exists x \in A; y = f(x)$. Em que lemos: "para todo elemento $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$.

  Exemplo: dada a função vista anteriormente, $f: \{1,2,3\} \to \{a, b, c\}$, tal que:



Olhando para a definição, temos que a imagem $Im(f) = \{a, b, c\}$, é igual ao contradomínio, logo, ela é uma função sobrejetora.

Exemplo: a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = 2x + 1$ é sobrejetora?

A resposta é afirmativa! Em geral, para se provar algebricamente que uma função é sobrejetora, tenta-se encontrar o x que está associado ao y, então para provar que $f(x) = 2x + 1$ é sobrejetora, vamos encontrar o $x \in \mathbb{R}$, a forma dele, tal que $y = f(x)$:

Temos que $y = 2x + 1$, então nos próximos passos vamos isolar o x, pois assim estamos mostrando que se tomarmos um valor de x específico, conseguiremos encontrar o seu valor correspondente na imagem. Se

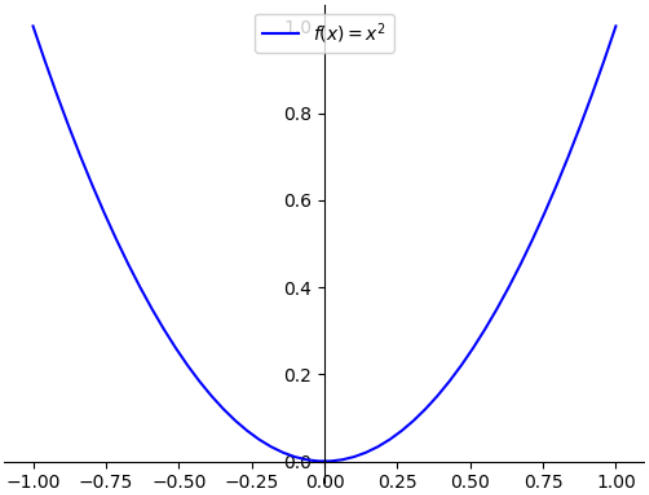
$$y = 2x + 1 \Leftrightarrow y - 1 = 2x \Leftrightarrow \frac{y-1}{2} = x$$

Portanto, tomando $y = (x-1)/2$, pertencente à imagem, da qual sabemos que existira um elemento no domínio, de maneira $y = f(x)$.

Exemplo: a função $f(x) = x^2$, definida $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não é injetora. Pois não existe número real no domínio, tal que $f(x) = -1$ ou $x^2 = -1$.

Graficamente, podemos perceber que a sua imagem só contém a parte positiva dos conjuntos reais. Então para que essa função fosse sobrejetora, ela deveria ter seu contradomínio modificado, como $f: \mathbb{R} \to \{0, +\infty\}$.

Gráfico 6 – Gráfico da função $f(x) = x^2$



Fonte: elaborado pela autora.

E, por fim, dizemos que uma função é *bijetora* se ela é uma função injetora e sobrejetora!

Por exemplo: a função $f(x) = x^3 - 2$ é bijetora?

De acordo coma definição devemos verificar que a função é injetora e bijetora.

Injetora: vamos provar que $x_1 = x_2$. De fato, suponha $f(x_1) = f(x_2)$ então

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^3 - 2 = x_2^3 - 2$$
$$\Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 - 2 + 2 \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3$$
$$\Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Portanto, f é injetora.

Sobrejetora: pela definição, se

$$y = x^3 - 2 \Leftrightarrow y + 2 = x^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{y+2} = x$$

Como não há restrições dentro da raiz cúbica, temos que a função é sobrejetora.

E, portanto, temos que a função é bijetora.

Exemplo: a função $f(x) = 5x - 3$ é bijetora?

Injetora: vamos provar que $x_1 = x_2$. De fato, suponha $f(x_1) = f(x_2)$. então

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 5x_1 - 3 = 5x_2 - 3$$
$$\Leftrightarrow 5x_1 = 5x_2 - 3 + 3 \Leftrightarrow 5x_1 = 5x_2$$
$$\Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Portanto, f é injetora.

Sobrejetora: pela definição, se

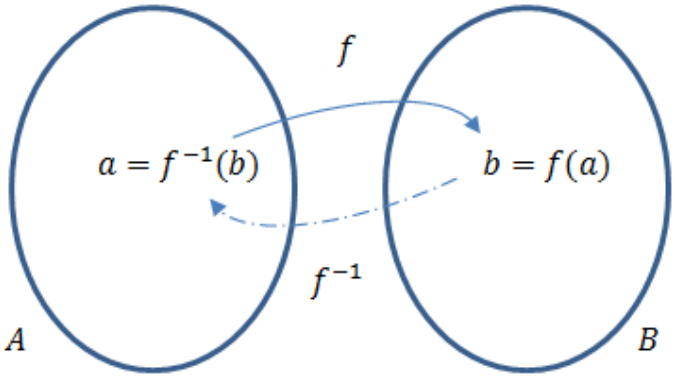
$$y = 5x - 3 \Leftrightarrow y + 3 = 5x \Leftrightarrow \frac{y+3}{5} = x$$

Logo, temos que a função é sobrejetora. E, portanto, temos que a função é bijetora.

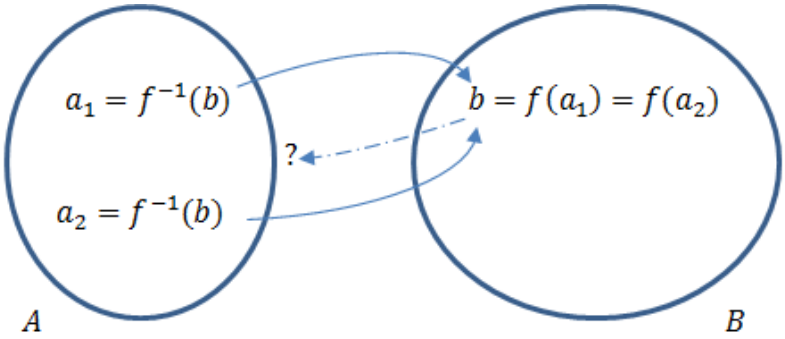
2.2 Função inversa

Considere uma função $f: A \to B$, bijetora. Como f é uma função sobrejetora, todo elemento de B é a imagem de algum elemento de A. E sendo f injetora então todo elemento de B é a imagem de um único elemento de A. Por meio dessas garantias podemos definir uma função que inverte essa correspondência dada por f. Sendo assim, definimos:

Seja $f: A \to B$ uma função bijetora. A *função inversa* de f é a função que leva a um elemento $b \in B$ ao seu único elemento $a \in A$, tal que $f(a) = b$. A função inversa é denotada por f^{-1}, e definida como $f^{-1}: B \to A$. Assim, $f^{-1}(b) = a$ quando $f(a) = b$.



Se a função f não é uma bijeção, não podemos garantir a existência da sua inversa. Quando f não é bijetora, ela não é injetora ou não é sobrejetora. Caso f não seja injetora, existirá pelo menos um elemento $b \in CDom(f)$, que é imagem de pelo menos dois elementos do domínio, i.e., $b = f(a_1)$ e $b = f(a_2)$. Assim o "caminho de volta" iria ser confuso...



E f não sendo sobrejetora, para algum elemento $b \in B$, ele não será imagem de um elemento $a \in A$, entãof^{-1}, pela definição de função, não seria uma função.

Exemplo: seja $f: \{1,2,3\} \to \{a,b,c\}$, onde $f(1) = b$, $f(2) = a$, $f(3) = c$. Ela é inversível?

A resposta é sim! Olhando para a função percebemos que ela é bijetora, e a sua inversa tem forma $f^{-1}(b) = 1$, $f^{-1}(a) = 2$, $f^{-1}(c) = 3$.

Exemplo: a função $f(x) = 5x - 3$ é inversível?

Vimos anteriormente que ela é uma função bijetora; então ela é sim inversível. E a sua inversa é dada pela expressão:

$$f^{-1}(x) = \frac{y+3}{5}$$

Obs.: no exemplo anterior, falamos que a expressão dada pela inversa era a mesma que encontramos quando provamos que a função é sobrejetora. E não é por acaso, em geral quando provamos que a função é sobrejetora, no fundo estamos procurando a expressão da função inversa.

Exemplo: mostre que $f(x) = \sqrt{x+1}$ possui inversa e encontre-a.

Primeiro devemos que f é bijetora, e para isso devemos mostrar que f é injetora e sobrejetora:

- f é injetora:

Aplicando a definição, suponha $f(x_1) = f(x_2)$ então se f é injetora devemos encontrar $x_1 = x_2$, de fato:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \sqrt{x_1+1} = \sqrt{x_2+1}$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x_1+1}\right)^2 = \left(\sqrt{x_2+1}\right)^2 \Leftrightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1$$
$$\Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Portanto, f é injetora.

- f é sobrejetora:

Aplicando a definição, devemos ter:

$$\forall\, y \in B, \exists\, x \in A; y = f(x)$$

Suponhamos que existe $y = f(x)$, vamos encontrar o valor de x para que isso seja possível. De fato,

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \sqrt{x+1}$$
$$\Leftrightarrow y^2 = x + 1 \Leftrightarrow y^2 - 1 = x$$

Portanto, temos que f é sobrejetora.

E assim temos que f é bijetora!

Agora devemos terminar f^{-1}: note que o domínio de f é $Dom(f) = [-1, +\infty[$ e $Im(f) = [0, +\infty[$, então o domínio de f^{-1} é $Dom(f^{-1}) = [0, +\infty[$.

Agora, para determinar a expressão da função inversa, primeiro tomaremos a expressão que encontramos na prova da função ser ou não sobrejetora e vamos trocar as variáveis, por conveniência assim:

$$y^2 - 1 = x \Leftrightarrow \boxed{x^2 - 1 = y}$$

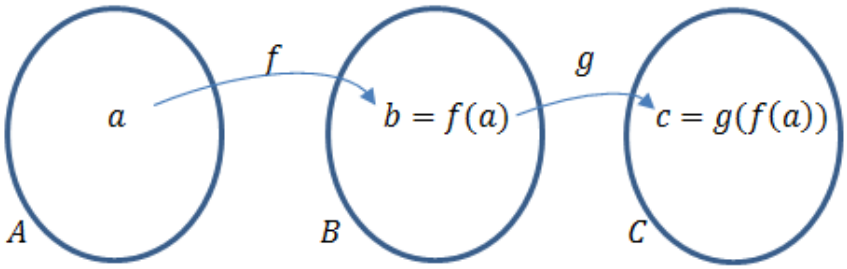
Portanto, $f^{-1}(x) = x^2 - 1$.

2.3 Composição de funções

A última propriedade que destacaremos é a composição de função, ao trabalhar com composição de funções estamos pensando em “uma maneira de

fazer uma combinação dos domínios" de duas ou mais funções, sem perda de generalidade. E essa combinação é a composição, que definimos como:

- Sejam as funções $f: A \to B$ e $g: B \to C$. Então a *composição* $g \circ f$ é a função $g \circ f: A \to C$, definida por $(g \circ f)(a) = g\big(f(a)\big); \forall a \in A$.



$g \circ f$

Note que para que a composição seja realizada de maneira correta, é fundamental que a *imagem da função* f seja igual ao *domínio da função* g.

Exemplo: seja $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,4,6\}$, $C = \{5,7,9\}$, onde $f: A \to B$ dada por $f(x) = 2x$ e $g: B \to C$ definido como $g(x) = x + 3$, calcule $g \circ f$.

Há duas maneiras de calcular a composição: a primeira é calcular ponto a ponto do domínio em g e depois em f; ou calcular diretamente a composição. Método 1: calculando ponto a ponto...

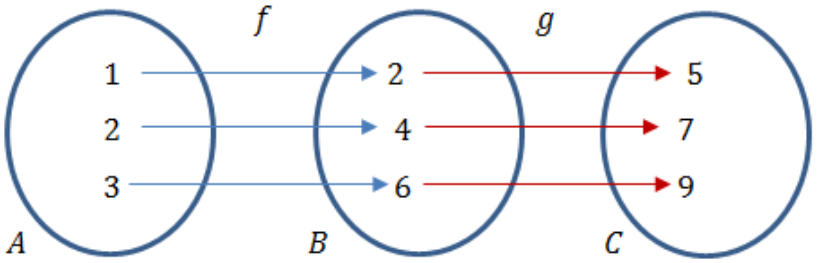
Queremos calcular $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, então primeiro vamos calcular os pontos em $f: \{1,2,3\} \to \{2,4,6\}$:

x	$f(x) = 2x$
1	$2(1) = 2$
2	$2(2) = 4$
3	$2(3) = 6$

Agora calculando os pontos em $g: \{2,4,6\} \to \{5,7,9\}$:

$f(x)$	$g(f(x)) = x + 3$
2	$(2) + 3 = 5$
4	$(4) + 3 = 7$
6	$(6) + 3 = 9$

Portanto, temos $(g \circ f)(1) = 5$, $(g \circ f)(2) = 7$ e $(g \circ f)(3) = 9$,



$g \circ f$

Método 2: vamos calcular diretamente qual a função composta: lembrando $f(x) = 2x$ e $g(x) = x + 3$.

$$(g \circ f)(x) = g(2x) = (2x) + 3 = 2x + 3$$

Assim:

x	$g(f(x)) = 2x + 3$
1	$2(1) + 3 = 5$
2	$2(2) + 3 = 7$
3	$2(3) + 3 = 9$

Exemplo: considere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x + 3$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 5x - 1$. Qual a composição $f \circ g$? E $g \circ f$?

Primeiro note que como f e g são funções reais, não há necessidade de nos preocuparmos com os domínios, e podemos sim fazer esses dois tipos de composição.

$f \circ g$: realizando a composição de maneira direta...

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(5x - 1) = 2(5x - 1) + 3 = 2(5x) - 2(1) + 3$$
$$= 10x - 2 + 3 = 10x + 1$$

Logo, $(f \circ g)(x) = 10x - 1$.

$g \circ f$: também realizando de maneira direta...

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = 5(2x + 3) - 1 = 5(2x) + 5(3) - 1$$
$$= 10x + 15 - 1 = 10x + 14$$

Assim, $(g \circ f)(x) = 10x + 14$.

Note que o exemplo acima nos mostra a seguinte observação: a propriedade de função composta não é comutativa, ou seja, $f \circ g \neq g \circ f$.

Exemplo: dada a função $f(x) = x^2 + 1$, defina quem é $f \circ f$.

Pela definição devemos ter:

$$(f \circ f)(x) = f\big(f(x)\big)$$
$$= \big(f(x)\big)^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 + 1$$
$$= x^4 + 2x^2 + 1 + 1$$
$$= x^4 + 2x^2 + 2$$

Exemplo: seja $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = f^{-1}(x)$. Encontre $f \circ f^{-1}$.

Antes de realizar a composição das funções precisaríamos verificar que a função é de fato inversível e assim encontrar sua inversa. Vamos lá!

Injetora: sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, então se $f(x_1) = f(x_2) \leftrightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \leftrightarrow x_1 = x_2$, logo f é injetora!

Sobrejetora: seja $y = f(x)$, então $y = 2x + 1 \leftrightarrow y - 1 = 2x \leftrightarrow \frac{y-1}{2} = x$, ou seja, f é sobrejetora!

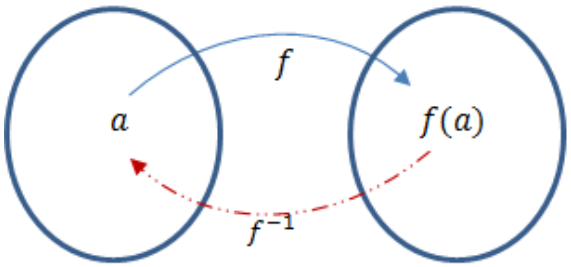
Portanto, f possui inversa e sua inversa é dada por $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$. Sabendo que a inversa existe e a expressão da inversa, podemos então fazer a composição.

$$(f \circ f^{-1})(x) = f\big(f^{-1}(x)\big) = f\left(\frac{x-1}{2}\right) = 2\left(\frac{x-1}{2}\right) + 1 = (x-1) + 1 = x$$

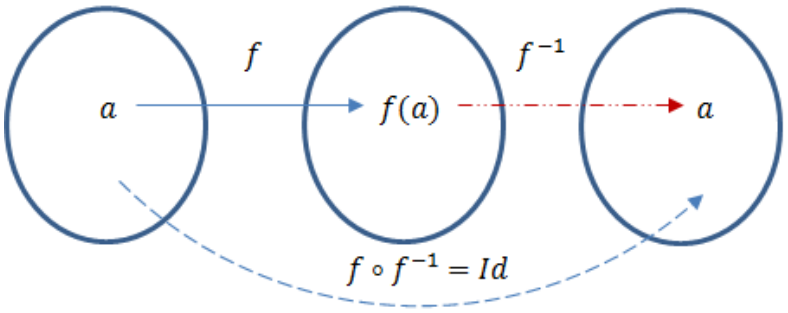
Logo, $(f \circ f^{-1})(x) = x$.

Quando fazemos a composição de uma função com a sua inversa, seja qual for a ordem, a função obtida é a identidade, como vimos no exemplo acima. Estranho seria se isso não acontecesse, veja o diagrama a seguir.

Lembre-se de que:



Logo,



Lembrando, ainda, que a função identidade é definida como $Id: A \to A$, tal que $Id(x) = x$.

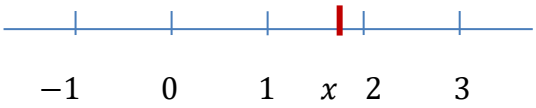
TEMA 3 – ALGUMAS FUNÇÕES IMPORTANTES

Na Matemática Discreta existem duas funções que se destacam dentre as funções que já conhecemos, conhecidas como *funções maior inteiro* e *menor inteiro.* Basicamente, elas consistem em tomar um número real, x, e levar o inteiro mais próximo a ele, e quem determina qual o inteiro será a função maior inteiro ou menor inteiro. Funções geralmente utilizadas quando os objetos são contáveis; aparecendo em aplicações para determinar tamanhos particulares.

3.1 Função maior inteiro

A função maior inteiro, também conhecida como *chão*, determina para o número real x, o maior número inteiro menor ou igual à x. E denotamos como $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

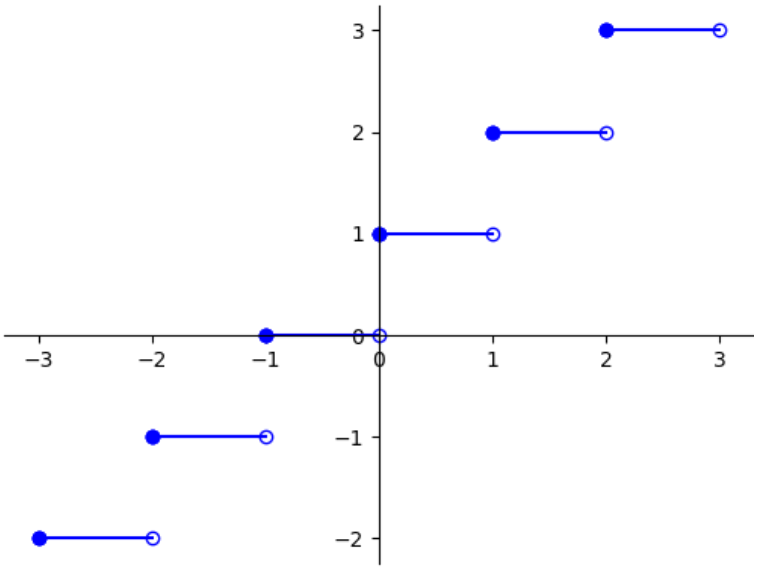
Se olharmos na reta real, podemos ter uma visualização de como ela funciona:



Nesse exemplo, percebemos que o valor x está mais próximo do número 2, mas olhando para a definição da função maior inteiro, estamos à procura do maior número inteiro menor ou igual à x, e esse seria 1, logo $\lfloor x \rfloor = 1$

Graficamente, essa função apresenta o comportamento a seguir.

Gráfico 7 – Gráfico da função $\lfloor x \rfloor = 1$



Fonte: elaborado pela autora.

Exemplo (Rosen, 2010): em um modo de transferência assíncrona (ATM) (um protocolo de comunicação usado em determinadas redes de transmissão), os dados são organizados em células de 53 bytes. Quantas células ATM podem ser transmitidas em 1 minuto em uma conexão que transmite os dados com uma taxa de 500 kilobits por segundos?

Solução: sabendo que $1\text{minuto} = 60$ segundos, então a conexão pode transmitir $500\,000 \cdot 30 = 30\,000\,000$ bits. Como cada célula tem 53 bytes, e sabendo que cada byte é composto por 8 bits, então $53 \cdot 8 = 424$ bits; então para determinar o número de células transmitidas em 1 minuto, usaremos a função maior inteiro no quociente de $30\,000\,000$ por 424. Logo:

$$\left\lfloor \frac{30\,000\,000}{424} \right\rfloor = \lfloor 70754{,}71698 \rfloor = 70.745$$

É o número de células transmitidas por minuto.

3.2 Função menor inteiro

Analogamente à função definida anteriormente, a função menor inteiro, também conhecida como *teto*, determina para o número real x o menor número inteiro maior ou igual à x. E denotamos como $f(x) = \lceil x \rceil$.

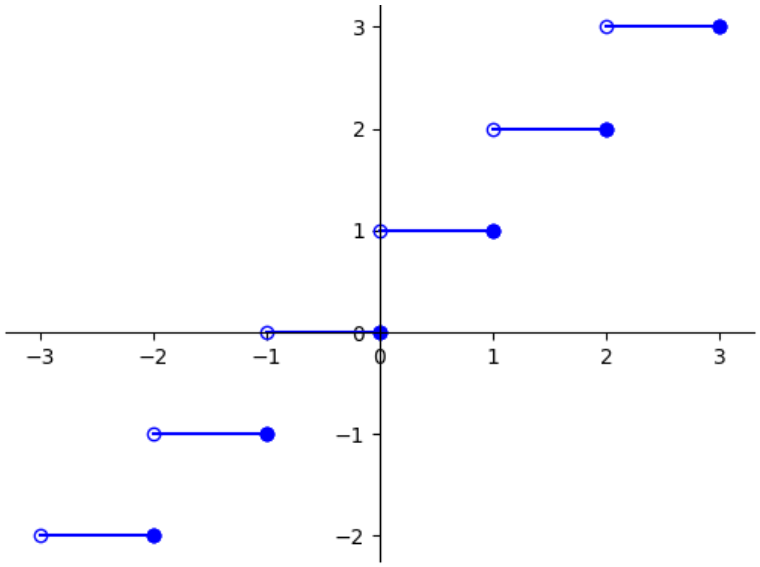
Novamente se olharmos na reta real, teremos uma visualização de como ela funciona:



No mesmo exemplo apresentado anteriormente, percebemos que o valor x está mais próximo do número 2, e olhando para a definição da função menor inteiro, estamos à procura do menor número inteiro menor ou igual à x, e aqui ele é 2, logo $\lceil x \rceil = 2$

Graficamente essa função apresenta o comportamento a seguir.

Gráfico 8 – Gráfico da função $\lceil x \rceil = 2$



Fonte: elaborado pela autora.

Vejamos um exemplo em que as duas funções atuam:

$$\left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 1, \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil = 2, \left\lfloor -\frac{3}{2} \right\rfloor = -2, \left\lceil -\frac{3}{2} \right\rceil = -1, \lfloor 2,2 \rfloor = 2, \lceil 2,2 \rceil = 3, \lfloor 1 \rfloor = 1, \lceil 1 \rceil = 1.$$

Exemplo (Rosen, 2010): o armazenamento de dados em um disco rígido ou a transmissão de dados por meio de uma rede são geralmente representados como uma cadeia de *bytes*. Cada *byte* é composto por 8 bits. Quantos *bytes* são necessários para codificar 100 bits de dados?

Solução: para determinar o número de *bytes*, basta tomarmos o menor número inteiro que é maior ou igual ao quociente de 100 por 8. Logo:

$$\left\lceil \frac{100}{8} \right\rceil = \lceil 12{,}5 \rceil = 13$$

3.3 Propriedades das funções maior inteiro e menor inteiro

Vejamos algumas propriedades relacionadas a essas funções – sejam $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}$, então:

1. $\lfloor x \rfloor = n$ se e somente se $n \leq x < n + 1$
2. $\lceil x \rceil = n$ se e somente se $n - 1 < x \leq n$
3. $\lfloor x \rfloor = n$ se e somente se $x - 1 < n \leq x$
4. $\lceil x \rceil = n$ se e somente se $x \leq n < x + 1$
5. $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$
6. $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$
7. $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$
8. $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$
9. $\lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n$

3.3 Outras funções

Claro que na Matemática Discreta utilizamos outros tipos de funções, usamos inclusive funções bem familiares, como função exponencial, logaritmo (em particular de base 2), fatorial, polinomial, entre outras; e cabe ao leitor fazer essa revisão mais profunda.

Dentre das funções mencionadas destacaremos a função fatorial e função exponencial.

Sejam n, m inteiros positivos, e b um número real positivo, então definimos a potência n do número b como:

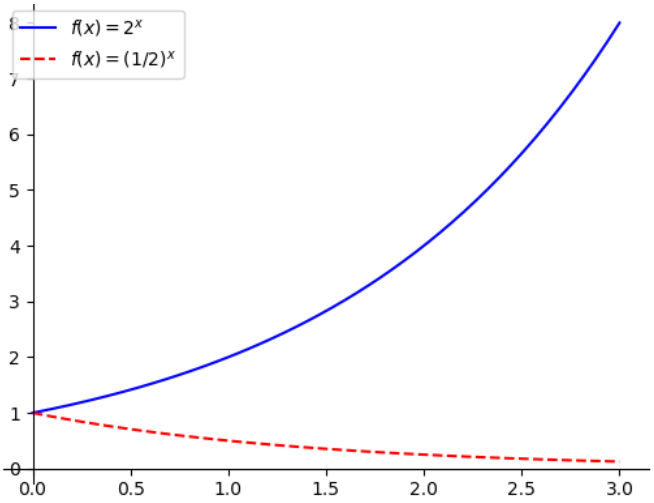
$$b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n-vezes}$$

Obedecendo as propriedades:

1. $b^{n+m} = b^n \cdot b^m$
2. $(b^n)^m = b^{nm}$

Assim, definimos uma função exponencial como uma função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ tal que $f(x) = b \cdot a^x$, com $b \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \neq 1$.

Gráfico 9 – Gráfico das funções $f(x) = 2^x$ e $f(x) = (1/2)^x$



Fonte: elaborado pela autora.

E dados a, b números inteiros positivos, com $b \neq 1$, chama-se logaritmo de a na base b o expoente x tal que $b^x = a$.

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

Denominando:

- a o logaritmando.
- b o base do logaritmo.
- x o logaritmo de a na base b.

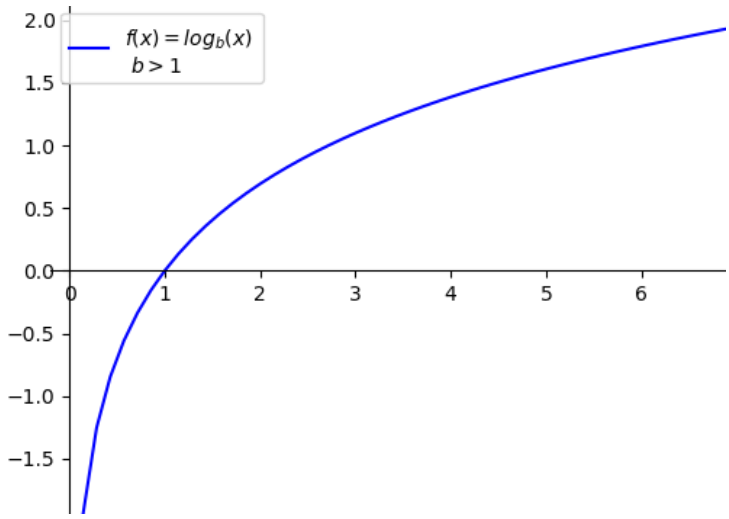
Que rege das propriedades:

1. $\log_b ac = \log_b a + \log_b y$, para a, c inteiros positivos.
2. $\log_b a^c = c \log_b a$, para a inteiro positivo.

Portanto, definimos a *função logarítmica* como $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, tal que:

$$f(x) = \log_b x$$

Gráfico 10 – Gráfico da função $f(x) = \log_b x$



Fonte: elaborado pela autora.

Já a função fatorial é definida como uma função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(n) = n!$ onde $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Em particular, definimos $0! = 1$.

Exemplo: vamos calcular $f(5) = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

TEMA 4 – NOÇÕES DE ESTRUTURAS ALGÉBRICAS

Dentre os vários significados para a palavra *álgebra*, o significado do olharemos é aquele que se refere a um dos ramos da matemática pura, onde a álgebra está relacionada a um estudo mais avançado, conhecido como *álgebra abstrata*.

Antes de definirmos qualquer conceito, devemos falar sobre um assunto que tratamos com muita naturalidade, *operações.*

No jardim de infância aprendemos a operação de adição e logo em seguida subtração; posteriormente partimos para multiplicação e divisão, as operações básicas que utilizamos nos nosso dia a dia. Claro que com o decorrer dos nossos estudos, percebemos que as operações não se limitam apenas a essas quatro, mas para cada tipo de objeto que estamos trabalhando temos operações específicas para trabalhar com eles, por exemplo, ao trabalharmos com conjuntos utilizamos as operações de união, interseção e diferença.

Formalmente, dizemos que dado um conjunto A, uma *operação* em A é uma função cujo domínio é $A \times A$.

E as operações gozam de propriedades como associatividade, comutatividade, distributividade, entre outras, mas a pergunta é por que estamos dando atenção a esse assunto? A resposta é simples, na álgebra trabalhamos com conjuntos e operações abstratas, de maneira que são as operações que vão “classificar” esses conjuntos dizendo se são grupos, subgrupos, anéis...

4.1 Grupos

Seja G um conjunto não vazio onde está definida uma operação * em $G \times G$, denotada por:

$$*: G \times G \to G$$
$$(x, y) \to x * y$$

Dizemos que o par $(G,*)$ é um *grupo* se valem as propriedades:

$G1)$ Associatividade: $a * (b * c) = (a * b) * c \ \forall a, b, c \in G$.

$G2)$ Elemento identidade: $\exists e \in G$ tal que $a * e = e * a = a \ \forall a \in G$.

$G3)$ Elemento inverso: $\forall a \in G, \exists b \in G$ tal que $a * b = b * a = e$, denotamos $b = a^{-1}$.

Exemplo: O conjunto $\mathbb{Z}$ é um grupo aditivo infinito.

De fato, vamos provar que $+: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, tal que $(x, y) \to x + y$ é um grupo! Para isso, vamos verificar as propriedades $G1, G2$ e $G3$.

$G1)$ Associativa: sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ então $a + (b + c) = (a + b) + c$ e de fato vale tal propriedade devido a definição de $\mathbb{Z}$.

$G2)$ Identidade: $\exists e \in G$, onde $a + e = e + a = a$, para que isso ocorra $e = 0$.

$G3)$ Inverso:$\forall a \in G, \exists b \in G$ tal que $a + b = b + a = e$, para que tal propriedade seja válida $a + b = 0 \leftrightarrow b = -a$. ■

Exemplo: seja S um conjunto não vazio e seja $G = \{f: S \to S: f \ bijetiva\}$. Se $*$ é a operação composição de função, então $(G,\circ)$ é um grupo, com elemento identidade $Id: S \to S$, tal que $x \to x$.

De fato, vamos provar que $\circ: G \times G \to G$ tal que $(g, f) \to g \circ f$ é um grupo! Verificando as propriedades $G1, G2$ e $G3$.

$G1)$ Associativa: sejam $f, g, h \in G$ então antes de provarmos tal propriedade, devemos verificar os domínios $f \circ (g \circ h)$ e $(f \circ g) \circ h$, primeiro observe que se $(f \circ g)(a) = f\big(g(a)\big) \to Dom(f \circ g) = Dom(g)$, já que o elemento atingido pela composição é a função de “dentro”, generalizando para

os nossos casos $Dom\big(f \circ (g \circ h)\big) = Dom(g \circ h) = Dom(h)$ e $Dom\big((f \circ g) \circ h\big) = Dom(h)$. Logo ambas as composições tem o mesmo domínio. Agora vamos verificar que ambas as composições geram o mesmo elemento (que de fato deve ocorrer já que elas têm o mesmo domínio): $\forall a \in Dom(h)$

$$\big(f \circ (g \circ h)\big)(a) = f(g \circ h)(a) = f\Big(g\big(h(a)\big)\Big) = (f \circ g)\big(h(a)\big) = ((f \circ g) \circ h)(a)$$

Logo $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$; ou seja, vale a associatividade.

$G2)$ Identidade: $\exists e \in G$, em que $f \circ e = e \circ f = f$, tomando $Id: S \to S$, tal que $x \to x$ como elemento identidade; note que $(f \circ Id)(x) = f\big(Id(x)\big) = f(x)$, pela definição da função identidade, logo $Dom(f \circ Id) = Dom(f)$. Por sua vez, $(Id \circ f)(x) = Id\big(f(x)\big) = f(x)$, pela definição, e assim $Dom(Id \circ f) = Dom(f)$. Portanto, segue $(f \circ Id)(x) = f\big(Id(x)\big) = f(x) = Id\big(f(x)\big) = (Id \circ f)(x)$ e mais, os domínios são os mesmos. Assim vale o elemento identidade.

$G3)$ Inverso:$\forall f \in G, \exists g \in G$ tal que $f \circ g = g \circ f = e$, para que tal propriedade seja válida $g = f^{-1}$ a função inversa.

Como G é o conjunto das funções bijetivas, sabemos que existe a garantia da função inversa, e sabemos que $f\big(f^{-1}(x)\big) = f^{-1}\big(f(x)\big) = Id(x)$, então é válida a propriedade.

Então segue que $(G,\circ)$ é um grupo. ■

Se em um grupo $(G,*)$, a propriedade

$$G4)\ a * b = b * a, \forall a, b \in G$$

é válida, então dizemos que esse grupo é um *grupo abeliano* (em honra ao matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829)). Os grupos abelianos costumam ser chamados, aditivos ou comutativos.

Exemplo: o grupo $(\mathbb{Z}, +)$ é um grupo abeliano.

Exemplo: o grupo $(\mathbb{Z},\cdot)$ é um grupo abeliano. Onde $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $(m, n) \to x^m \cdot x^n = x^{m+n}$.

4.2 Subgrupos

Sejam $(G,*)$ um grupo e H um subconjunto não vazio de G. Dizer que H é um *subgrupo* de G, H deve ser um grupo com a mesma operação de G. E a garantia se dá pela proposição abaixo.

Proposição: seja G um grupo e H um subconjunto de $(G,*)$. As seguintes condições são equivalentes:

(a) H é subgrupo de G.

(b)

(i) $e \in H$

(ii) $\forall a, b \in H$ então $a * b \in H$

(ii) $\forall a \in H$ então $a^{-1} \in H$

(c) $H \neq \emptyset$ e $\forall a, b \in H$ então $a * b^{-1} \in H$

Demonstração: podemos encontrar a prova em Gonçalves (2011).

Assim para provar que H é um subgrupo de G, basta provar uma das equivalências listadas na proposição. E denotamos H subgrupo de G, como $H \leq G$.

Exemplo: $H = \mathbb{Z} \cdot m = \{k \cdot m; k \in \mathbb{Z}\}$, $m \in \mathbb{Z}$, é um subgrupo do grupo aditivo dos inteiros $(\mathbb{Z}, +)$.

De fato, como vale a proposição provando o item (c), segue que $H \leq \mathbb{Z}$, pelo item (a).

Primeiro note que $H \neq \emptyset$, pois em particular tomando $k = 1 \in \mathbb{Z}$, e $m = 1 \in \mathbb{Z}$, temos $1 \cdot\cdot\, 1H$. Segundo, temos que o elemento inverso do grupo $(\mathbb{Z}, +)$ é o $-b$, e mais $-b \in H$, pois podemos escrever $-b = b \cdot (-1)$, onde $-1 \in \mathbb{Z}$. Logo se $a, b \in H$ então $a * b^{-1} = a \cdot (-b)$, que podemos escrever como $a * b^{-1} = a \cdot b \cdot (-1) = (ab)(-1) \in H$, já que $a, b \in \mathbb{Z}$ então $a \cdot b \in \mathbb{Z}$.

Portanto $H \leq \mathbb{Z}$. ■

4.3 Anéis

Seja A um conjunto não vazio onde estejam definidas duas operações, que chamaremos soma e produto em A. Assim:

$$+: A \times A \to A$$
$$(a, b) \to a + b$$

e

$$\cdot: A \times A \to A$$
$$(a, b) \to a \cdot b$$

Dizem que $(A, +, \cdot)$ é um *anel* se satisfaz: sejam $a, b, c \in A$.

$A1$) Associativa da soma: $(a+b)+c=a+(b+c)$.

$A2$) Elemento neutro da soma: $\exists 0 \in A$ tal que $a+0=0+a=a$.

$A3$) Elemento inverso da soma: $\forall x \in A$ existe um único $y \in A$, tal que $x+y=y+x=0$, e denotamos $y=-x$.

$A4$) Comutativa da soma: $a+b=b+a$.

$A5$) Associativa do produto: $(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$.

$A6$) Distributiva: $a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$; $(a+b) \cdot c=a \cdot c+b \cdot c$.

Exemplos: os conjuntos $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ são anéis.

De fato, pelas suas propriedades sabemos que valem as propriedades que definem um anel.

Se $(A,+,\cdot)$ é um anel, ele satisfaz:

$A7$) Elemento neutro: $\exists 1 \in A, 1 \neq 0$ tal que $a \cdot 1=1 \cdot a=a$.

$A8$) Comutativo: $a \cdot b=b \cdot a$.

$A9$) Sem divisores de zero: $a \cdot b=b \cdot a=0$ então $a=0$ ou $b=0$.

$A10$) $\forall a \in A; a \neq 0, \exists b \in A$ tal que $a \cdot b=b \cdot a=1$, dizemos que $(A,+,\cdot)$ é um corpo.

Se um anel $(A,+,\cdot)$ satisfaz $(A7), (A8)$ e $(A9)$ dizemos que ele é um anel comutativo.

Dos exemplos que acabamos de ver, temos que $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são anéis comutativos.

Exemplo: seja A o conjunto de todas as matrizes 2×2;

$$A=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R}\right\}$$

É um anel não comutativo, em que a soma e multiplicação são definidas:

$$+: \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{bmatrix}$$

$$\cdot: \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{bmatrix}$$

De fato, primeiro vamos provar que ele é um anel e em seguida verificaremos que ele não é comutativo.

Anel:

$A1)$ $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' + a'' & b' + b'' \\ c' + c'' & d' + d'' \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a + (a' + a'') & b + (b' + b'') \\ c + (c' + c'') & d + (d' + d'') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a + a') + a'' & (b + b') + b'' \\ (c + c') + c'' & (d + d') + d'' \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{bmatrix}$$

$A2)$ Aqui o elemento neutro é a matriz nula, então:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 0 & b + 0 \\ c + 0 & d + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$A3)$ $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + (-a) & b + (-b) \\ c + (-c) & d + (-d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$A4)$ $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' + a & b' + b \\ c' + c & d' + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$A5)$ $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'a'' + b'c'' & a'b'' + b'd'' \\ c'a'' + d'c'' & c'b'' + d'd'' \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a(a'a'' + b'c'') + b(c'a'' + d'c'') & a(a'b'' + b'd'') + b(c'b'' + d'd'') \\ c(a'a'' + b'c'') + d(c'a'' + d'c'') & c(a'b'' + b'd'') + d(c'b'' + d'd'') \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (aa' + bc')a'' + (ab' + bd')c'' & (aa' + bc')b'' + (ab' + bd')d'' \\ (ca' + dc')a'' + (cb' + dd')c'' & (ca' + dc')b'' + (cb' + dd')d'' \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{bmatrix}$$

A propriedade $(A6)$ deixaremos a seu cargo, mas como vimos nas cinco primeiras que as propriedades funcionam, pois operamos elementos a elemento da matriz e cada entrada opera com números reais, sabemos que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ é um anel.

Anel não comutativo: se tomarmos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Basta mostrar que não vale $(A8)$, para que A não seja anel comutativo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por sua vez:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, não vale a comutatividade, assim, esse anel não é comutativo. ■

4.4 Subanéis

Seja $(A,+,\cdot)$ um anel e B um subconjunto não vazio de A. Suponha que B seja fechado para as operações de soma e produto, ou seja, $\forall a,b \in B$, temos $a+b \in B$ e $a \cdot b \in B$. Dizemos que $(B,+,\cdot)$ é um subanel de A, denotado por $B \leq A$, se satisfaz a proposição:

Proposição: seja$(A,+,\cdot)$ um anel e seja B um subconjunto de A. Então, B é um subanel de A se e somente se valem as condições:

i. $0 \in B$ (o elemento neutro de A, também pertence à B)
ii. $\forall a,b \in B$ então $a-b \in B$
iii. $\forall a,b \in B$, então $a \cdot b \in B$

Demonstração: podemos encontrar a prova em Gonçalves (2011).

Exemplo: os conjuntos $n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q} \leq \mathbb{R}$ são subanéis.

TEMA 5 – HOMOMORFISMOS E ISOMORFISMOS

No Tema 4, vimos uma simples introdução de estruturas algébricas, entretanto, como trabalhamos com elas? A resposta está aqui no Tema 5, em que utilizamos os homomorfismos para trabalhar com anéis ou grupos. No fundo, um homomorfismo é uma aplicação que tem domínio e contradomínio, e estruturas algébricas de mesma natureza, como grupos e anéis.

5.1 Homomorfismos e isomorfismos de anéis

Sejam $(A,+,\ \cdot)$ e $(A',+,\cdot)$ dois anéis com suas respectivas operações. Uma função $f: A \to A'$ é um *homomorfismo* de A em A' se satisfaz:

i. $f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x,y \in A$
ii. $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \qquad \forall x,y \in A$

Agora se $f: A \to A'$ é um homomorfismo bijetivo, dizemos que f é um *isomorfismo* de A em A'. E dizemos que A e A' são *isomorfos*, denotando por $A \cong A'$.

Podemos encontrar homomorfismos do tipo $f: A \to A$, que recebem o nome de *endomorfismos.*

Agora, caso temos um isomorfismo do tipo $f: A \to A$, então o chamamos de *automorfismo.*

Exemplo: sejam A e A' anéis. A função constante zero, definida $f: A \to A'$ dada por $f(x) = 0 \ \forall x \in A$, claramente é um homomorfismo. Assim como a função identidade, dada $h: A \to A$ onde $h(x) = 1$, é um automorfismo.

E mais, nos homomorfismos valem: sejam A e A' anéis e $f: A \to A'$ um homomorfismo. Então:

i. $f(0) = 0'$
ii. $f(-a) = -f(a)$
iii. $Im(f) = \{f(a): a \in A\}$ é um subanel de A'.

Note que essas propriedades mostram que um homomorfismo de anéis preserva o elemento neutro e seu inverso.

5.2 Homomorfismos e isomorfismos de grupos

Sejam $(G,*)$ e $(G',*)$ dois grupos com suas respectivas operações. Uma função $f: G \to G'$ é um *homomorfismo* de G em G' se satisfaz:

$$f(x * y) = f(x) * f(y) \quad \forall x, y \in G$$

Agora se $f: G \to G'$ é um homomorfismo bijetivo, dizemos que f é um *isomorfismo* de G em G'. E dizemos que G e G' são *isomorfos*, denotando por $G \cong G'$.

E nos homomorfismos de grupos $Im(f) = \{f(a): a \in A\}$ é um subgrupo de G'.

Agora homomorfismos do tipo $f: G \to G$, que recebem o nome de *endomorfismos.*

FINALIZANDO

Chegando ao fim desta aula, podemos perceber que em resumo estudamos funções! Definimos elas, aprendemos suas principais propriedades, vimos também alguns tipos de funções bastante utilizadas na Matemática Discreta. E ainda aprendemos alguns conceitos novos, apenas uma introdução sobre estruturas algébricas e ainda vimos que a ferramenta que permite manipular essas estruturas algébricas são as funções.

Na próxima aula trabalharemos com relações recursivas, ainda do ponto de vista mais lógico. Aprenderemos alguns conceitos novos, ferramentas e

propriedades que auxiliarão na compreensão e na manipulação de recursos vistos ao longo do curso!

REFERÊNCIAS

GONÇALVES, A. **Introdução à álgebra**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

ROSEN, K. H. **Matemática discreta e suas aplicações**. 6. ed. São Paulo: Editora AMGH, 2010.