MATEMÁTICA DISCRETA

AULA 5

Profª Thamara Petroli

CONVERSA INICIAL

Sequências e relações de recursão

Na matemática, é muito comum vermos expressões do tipo “dada uma sequência de número naturais ímpares $\mathbf{1, 3, 5, 7}$ ... Podemos defini-la como $\boldsymbol{x_{n+1} = x_n + 2}$, em que $\boldsymbol{x_1 = 1}$”. Esse tipo de exemplo mostra um tipo de sequência infinita dada por uma fórmula de recorrência.

Esse exemplo mostra exatamente os conceitos que veremos nesta aula, visto que nas aulas anteriores aprendemos sobre indução e funções. Esta aula vem como uma “mistura” desses assuntos, não vamos tratar de indução novamente, mas sim do conceito de sequências infinitas e recorrências, juntamente com funções que trabalham com isso, que são os somatórios e produtórios.

TEMA 1 – SOMATÓRIOS

Na matemática, muitas das quantidades importantes são determinadas por somas de uma quantidade variável de parcelas, por exemplo, $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$, para algum n inteiro. Assim como nesse caso, utiliza-se o símbolo *sigma maiúsculo*, para denotar tal soma, também podemos chamá-lo de *somatório.* Para o exemplo que acabamos de ver:

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$$

De maneira que na parte de baixo do somatório indicamos o primeiro termo da soma, e na parte superior, o último.

Em geral, denotamos um somatório como:

$$\sum_{k=m}^{n} f(k)$$

Em que k é uma variável arbitrária, também conhecido como *índice* ou *variável indexadora*; $f(k)$ denota uma fórmula que depende dos valores de k, e m, n são valores que não dependem de k, e mais $m \leq k \leq n$. Podemos ainda encontrar variações dessa notação:

$$\sum_{\substack{k \\ m \le k \le n}} f(k)$$

Ou:

$$\sum_{m \le k \le n} f(k)$$

Ou:

$$\sum_{\substack{k \\ P(k)}} f(k)$$

Em que $P(k)$denota uma regra/predicado sobre os inteiros, “soma de todos os valores $f(k)$ tais que $P(k)$ é verdadeiro”. Vejamos mais alguns exemplos:

$$\sum_{\substack{1 \le k \le 10 \\ k\ par}} k^2 = 2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2$$

$$\sum_{\substack{p\ primo \\ p\ divide\ 120}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

1.1 Propriedades

Como no somatório estamos trabalhando literalmente com somas, então, a notação Σ permite que a manipulemos de diversas maneiras, sendo assim, valem as propriedades:

1. Distributiva: para qualquer c

$$\sum_{k} c \cdot f(k) = c\left(\sum_{k} f(k)\right)$$

2. Associativa:

$$\sum_k (f(k) + g(k)) = \sum_k f(k) + \sum_k g(k)$$

3. Decomposição: sejam $K_1, K_2 \subseteq K$, onde $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ e $K_1 \cup K_2 = K$, para K é o domínio do índice k. Então:

$$\sum_{k \in K} f(k) = \sum_{k \in K_1} f(k) + \sum_{k \in K_2} f(k)$$

4. Troca índice: se p é uma função bijetora qualquer de K para um conjunto $J \subseteq \mathbb{Z}$,

$$\sum_{k \in K} f(p(k)) = \sum_{j \in J} f(j)$$

Exemplo: dado o somatório $\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k)$, para x uma sequência de números reais. Utilizando as propriedades acima, reescreva tal somatório.

Temos:

$$\sum_{k=1}^{n} (x_{k+1} - x_k)$$

Utilizando a propriedade associativa:

$$\sum_{k=1}^{n} (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=1}^{n} x_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Reescrevendo o índice do primeiro somatório: $k + 1 = i$, assim, quando $k = 1 \Rightarrow i = 2$ e quando $k = n \Rightarrow i = n + 1$, portanto:

$$\sum_{k=1}^{n} (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=1}^{n} x_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{i=2}^{n+1} x_i - \sum_{k=1}^{n} x_k$$

"Tirando" o último termo do primeiro somatório e primeiro termo do segundo somatório, para deixá-los começando com o mesmo índice, temos:

$$\sum_{k=1}^{n} (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=1}^{n} x_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{i=2}^{n+1} x_i - \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{i=2}^{n} x_i + x_{n+1} - x_1 - \sum_{k=2}^{n} x_k$$

Trocando o índice novamente de i para k

$$\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)=\sum_{k=1}^{n}x_{k+1}-\sum_{k=1}^{n}x_k=\sum_{i=2}^{n+1}x_i-\sum_{k=1}^{n}x_k=\sum_{k=2}^{n}x_k+x_{n+1}-x_1-\sum_{k=2}^{n}x_k$$

Perceba que os somatórios são iguais, mas com sinais opostos, então, podemos anular ambos os somatórios:

$$\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)=\sum_{k=2}^{n}x_k+x_{n+1}-x_1-\sum_{k=2}^{n}x_k=x_{n+1}-x_1+\sum_{k=2}^{n}x_k-\sum_{k=2}^{n}x_k$$

$$=x_{n+1}-x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+\cdots x_n-x_2-x_3-x_4-x_5-\cdots-x_n$$

$$=x_{n+1}-x_1+\cancel{x_2}+\cancel{x_3}+\cancel{x_4}+\cancel{x_5}+\cdots\cancel{x_n}-\cancel{x_2}-\cancel{x_3}-\cancel{x_4}-\cancel{x_5}-\cdots-\cancel{x_n}$$

$$=x_{n+1}-x_1$$

Exemplo: calcule o somatório $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$.

Primeiro, calculando a expressão $k(k+1)=k^2+k$, então:

$$\sum_{k=1}^{n}k^2+k=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+(1+2+3+4+\cdots+n)$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$$

(Somatórios clássicos possíveis de encontrar suas fórmulas na literatura).

$$\sum_{k=1}^{n}k^2+k=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Exemplo: calcule $\sum_{k=0}^{n-1}2^k$.

Primeiro observe que $2^k=2^k(1)=2^k(2-1)=2^{k+1}-2^k$, assim:

$$\sum_{k=0}^{n-1}2^k=\sum_{k=0}^{n-1}2^{k+1}-2^k=\sum_{k=0}^{n-1}2^{k+1}-\sum_{k=0}^{n-1}2^k$$

$$=(2^{0+1}+2^{1+1}+2^{2+1}+\cdots+2^{n-2+1}+2^{n-1+1})$$

$$-(2^0+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1})$$

$$=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}+2^n-2^0-2^1-2^2-2^3-\cdots-2^{n-1}$$

$$= 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n - 2^0 - 2^1 - 2^2 - 2^3 - \cdots - 2^{n-1}$$

$$= 2^n - 2^0 = 2^n - 1$$

5. Somatórios Múltiplos: os somatórios ainda podem ser especificados por dois ou mais índices, como:

$$\sum_{\substack{j,k \\ 1 \le j \le 3 \\ 0 \le k \le 1}} f(j,k) = f(1,0) + f(1,1) + f(2,0) + f(2,1) + f(3,0) + f(3,1)$$

Em casos como esses, podemos escrever o mesmo somatório da maneira:

$$\sum_{1 \le j \le 3} \sum_{0 \le k \le 1} f(j,k) = \sum_{1 \le j \le 3} f(j,0) + f(j,1)$$

Ou ainda como:

$$\sum_{0 \le k \le 1} \sum_{1 \le j \le 3} f(j,k) = \sum_{0 \le k \le 1} f(1,k) + f(2,k) + f(3,k)$$

Como vimos anteriormente, a ordem não alterará o resultado final da soma. Podemos usar dessa propriedade de comutatividade para trabalhar com o produto, assim, para quaisquer $J, K \subseteq \mathbb{Z}$ e quaisquer funções $f: J \to \mathbb{R}$ e $g: K \to \mathbb{R}$.

$$\left(\sum_{j \in J} f(j)\right)\left(\sum_{k \in K} g(k)\right) = \sum_{\substack{j \in J \\ k \in K}} f(j)g(k) = \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} f(j)g(k)$$

1.2 Majoração

Em muitos casos não precisamos saber do exato valor da soma, basta estimar o seu limitante superior ou inferior. Vejamos alguns tipos:

1. Majoração de termos: aqui limita-se termo a termo do somatório pelo termo de maior valor. Por exemplo:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \cdots + \frac{n}{n-1} < \sum_{k=1}^{n} 2 = 2n$$

Note que, conforme o índice k aumenta, o número se torna cada vez menor, sendo 2 o menor, podendo ser o limitante dos termos.

2. Majoração por indução matemática: podemos utilizar as ferramentas de indução matemática para encontrar o majorante. Por exemplo: vamos provar que existe uma constante $c > 0$ tal que:

$$\sum_{i=0}^{n} 3^i \leq c3^n$$

Devemos provar que $(\exists c > 0)(\forall n \in \mathbb{N})$.

$$\sum_{i=0}^{n} 3^i \leq c3^n$$

Passo base: tomando $n = 0$:

$$\sum_{i=0}^{0} 3^i \leq c3^0 \Leftrightarrow 3^0 = 1 \leq c(1)$$

Sentença válida para qualquer $c > 0$.

Hipótese de indução: suponhamos que a desigualdade seja válida para algum k:

$$\sum_{i=0}^{k} 3^i \leq c3^k$$

Passo de indução: vamos provar para $k + 1$, temos que:

$$\sum_{i=0}^{k+1} 3^i = \sum_{i=0}^{k} 3^i + 3^{i+1}$$

Sabendo que vale a hipótese de indução, segue

$$\sum_{i=0}^{k+1} 3^i = \sum_{i=0}^{k} 3^i + 3^{i+1} \leq c3^k + 3^{i+1} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{c}\right) c3^{i+1}$$

como $\frac{1}{3} + \frac{1}{c} \leq 1$, então:

$$\sum_{i=0}^{k+1} 3^i = \sum_{i=0}^{k} 3^i + 3^{i+1} \leq c3^k + 3^{i+1} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{c}\right) c3^{i+1} \leq c3^{i+1}$$

1.3 Somas infinitas

Ainda podemos encontrar somas infinitas, também conhecidas como *séries*. Um somatório infinito é o limite de um somatório finito, quando o último valor, ou o maior valor, tende a infinito.

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f(k)$$

Exemplos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2$$

e

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = \infty$$

TEMA 2 – PRODUTÓRIOS

Análogo à ideia de somatório, o produtório denota o produto dos valores $f(k)$, para os valores inteiros k, m, n, tais que $m \leq k \leq n$:

$$\prod_{k=m}^{n} f(k) = f(m) \cdot f(m+1) \cdot \ldots \cdot f(n)$$

Exemplo: vamos calcular.

$$\prod_{k=-2}^{2} k^2 + 1$$

Pela definição:

$$\prod_{k=-2}^{2} k^2 + 1 = ((-2)^2 + 1) \cdot ((-1)^2 + 1) \cdot (0^2 + 1) \cdot (1^2 + 1) \cdot (2^2 + 1)$$

$$= (4+1)(1+1)(0+1)(1+1)(4+1) = 5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 = 100$$

2.1 Propriedades

Dado que os conceitos de produtório e somatório são similares, é natural pensar que as propriedades sejam similares, e de fato são! Respeitando o fato

que aqui estamos trabalhando com a operação de multiplicação, é possível adaptar as propriedades associativa, distributiva, decomposição e troca de índice para o caso do produtório. Vejamos alguns fatos.

1. Produto simples:

$$\prod_{k=1}^{n} b_k = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n$$

2. Produto de uma constante:

$$\prod_{k=1}^{n} b = \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n-vezes} = b^n$$

3. Produto de uma constante por uma variável:

$$\prod_{k=1}^{n} cf(k) = cf(1) \cdot cf(2) \cdot \ldots \cdot cf(n) = c^n f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(n) = c^n \prod_{k=1}^{n} f(k)$$

4. Produto de duas variáveis:

$$\prod_{k=1}^{n} f(k)\, g(k) = f(1)g(1) \cdot f(2)g(2) \cdot \ldots \cdot f(n)g(n)$$

$$= [f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots f(n)] \cdot [g(1) \cdot g(2) \cdot \ldots \cdot g(n)] = \prod_{k=1}^{n} f(k) \prod_{k=1}^{n} g(k)$$

5. Produto de uma variável-índice:

$$\prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

6. Logaritmo do produto:

$$\log \prod_{k=1}^{n} f(k) = \log[f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(n)] = \log f(1) + \log f(2) + \cdots + \log f(n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \log f(k)$$

Exemplo: dados $X = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ e $Y = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, calcule

$$\prod_{k=1}^{5} x_k \,, \prod_{k=1}^{5} y_k \,, \prod_{k=1}^{5} x_k y_k$$

Primeiro vamos calcular o produtório:

$$\prod_{k=1}^{5} x_k$$

Pela definição:

$$\prod_{k=1}^{5} x_k = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 = 3840$$

Agora calcularemos o segundo produtório:

$$\prod_{k=1}^{5} y_k = y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot y_4 \cdot y_5 = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 = 945$$

E o último produtório:

$$\prod_{k=1}^{5} x_k y_k = x_1 y_1 \cdot x_2 y_2 \cdot x_3 y_3 \cdot x_4 y_4 \cdot x_5 y_5 = 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 9$$

$$= 3628800$$

Por outro lado, poderíamos ter feito...

$$\prod_{k=1}^{5} x_k y_k = \left(\prod_{k=1}^{5} x_k\right)\left(\prod_{k=1}^{5} y_k\right) = (3840)(945) = 3628800$$

TEMA 3 – SEQUÊNCIAS

Uma sequência é uma "estrutura discreta", utilizada para representar uma lista ordenada. Por exemplo, quando listamos os números naturais do intervalo $[1,6]$ temos a sequência $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Esse tipo se sequência podemos chamar *sequência finita*. Agora, sequências do tipo $1,2, 3, 4, \dots, 100, 101, \dots, 1000,1001, \dots$ são conhecidas como *sequências infinitas*.

Formalmente, dizemos que uma sequência é uma função de um subconjunto do conjunto dos números inteiros para um subconjunto A.

Usualmente, usamos a notação $\{a_n\}$ para descrever a sequência e a_n indica um elemento da sequência na posição n, por exemplo, dada a sequência:

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}, 9\right\}$$

Nessa sequência, o primeiro termo da série $a_1 = 1$, o segundo termo $a_2 = \frac{1}{2}$, sexto elemento $a_6 = \frac{11}{2}$, e assim sucessivamente.

Descrevemos as sequências como uma lista de elementos, como já mencionamos de maneira ordenada, em ordem crescente dos subíndices.

Exemplo: seja a sequência $\{a_n\}$ em que

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Primeiro, note que, para que haja sentido, a sequência deve começar em $n = 1$, ou seja,

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

De maneira que a sequência é dada como:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

Perceba que, conforme a sequência vai crescendo, os elementos da sequência vão decrescendo.

3.1 Tipos especiais de sequências

Existem algumas sequências que desempenham um importante papel na matemática, já que suas aplicações são inúmeras.

A primeira delas é a **progressão aritmética**, sequência essa em que é possível encontrar um padrão em que podemos determinar todos os seus termos conhecendo apenas o primeiro termo e certa constante.

Sendo assim, dizemos que uma sequência é uma progressão aritmética se, e somente se, cada termo a partir do segundo for igual à soma do termo anterior com uma constante r, a qual chamamos de *razão* da progressão.

Por exemplo: dada a sequência $\{2, 5, 8, 11, 14, 17, \ldots\}$, observe que a diferença entre um termo e seu sucessor (ou anterior) é igual a 3, i.e., $5 - 2 = 3$ assim como $8 - 5 = 3$, ou ainda $14 - 11 = 3$.

De maneira geral,

$$\overset{+r}{\{a_1, \overbrace{a_2, a_3}, a_4 \ldots, a_n, \ldots\}}$$
$$\underbrace{\quad}_{+r} \quad \underbrace{\quad}_{+r}$$

Em que podemos determinar qualquer termo da série por meio de:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

para r a razão determinada por:

$$r = a_n - a_{n-1}, n \geq 2$$

Exemplo: dada a sequência $\{3, 5, 7, \dots\}$ determine o vigésimo termo.

Para determinar $20°$ termo, devemos notar que o primeiro termo da sequência é $a_1 = 3$ e a razão é dada por $7 - -5 =$, logo:

$$a_{20} = a_1 + (20 - 1) \cdot r = 3 + 19 \cdot 2 = 41$$

Exemplo: dada a sequência $\{24, 21, 18, 15, \dots\}$, determine o décimo termo.

Para determinar $10°$ termo, devemos notar que o primeiro termo da sequência é $a_1 = 24$ e a razão é dada por $18 - 21 = -3$, e, mais, essa progressão é decrescente, pois cada elemento da sequência vai decaindo, logo:

$$a_{10} = a_1 + (10 - 1) \cdot r = 24 + 9 \cdot (-3) = 24 - 27 = -3$$

Ainda podemos determinar a soma dos n primeiros termos da série, da seguinte maneira:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Por exemplo, do último exemplo, se somarmos os 10 primeiros termos da série, temos:

$$S_{10} = \frac{\big(24 + (-3)\big) \cdot 10}{2} = \frac{21 \cdot 10}{2} = \frac{210}{2} = 42$$

O segundo tipo de sequência, análoga à progressão aritmética, é a **progressão geométrica**. A ideia básica é a mesma: determinar os valores consecutivos de uma sequência partindo do primeiro termo e a sua razão.

Entretanto, dizemos que uma sequência é uma progressão geométrica se, e somente se, cada termo a partir do segundo for igual ao produto do termo anterior pela sua razão, denotada por q.

Por exemplo: dada a sequência:

$$\{2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$$

Observe a para gerarmos o segundo termo da sequência, basta multiplicarmos o primeiro termo por 2, i.e., $4 = 2 \cdot 2$. O terceiro termo é dado pela multiplicação do segundo termo por 2, $8 = 4 \cdot 2$. De maneira análoga, $16 = 8 \cdot 2$ e $32 = 16 \cdot 2$.

E aqui a razão é 2.

Genericamente, podemos encontrar qualquer termo (n) da série por meio de:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

em que determinamos a razão como:

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

a razão entre um termo qualquer e o seu anterior.

Exemplo: dada a sequência,$\{1, 3, 9,27, \dots\}$, determine a_7.

Pela definição devemos determinar o primeiro termo, $a_1 = 1$, e a razão

$$q = \frac{27}{9} = 3$$

Assim, substituindo na fórmula, segue:

$$a_7 = (1)(3)^{7-1} = 3^6 = 729$$

Exemplo: dada a sequência $\{32, 16, 8, 4, 2, \dots\}$, determine a_9.

Observe que tal sequência tem seus valores decrescendo de acordo com o crescimento da série, então, é natural entrar uma razão menor que 1. Logo pela definição devemos determinar o primeiro termo, $a_1 = 32$, e a razão:

$$q = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Assim, substituindo na fórmula, segue:

$$a_9 = (32)\left(\frac{1}{2}\right)^{9-1} = (32)\left(\frac{1}{2}\right)^{8} = 32\left(\frac{1}{256}\right) = \frac{32}{256} = \frac{1}{8}$$

Novamente podemos determinar a soma dos n primeiros termos da série, da seguinte maneira:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

para $q \neq 1$.

Por exemplo: do último exemplo, se somarmos os 7 primeiros termos da série, temos:

$$S_7 = \frac{32\left(\left(\frac{1}{2}\right)^7 - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{32\left(\frac{1}{128} - 1\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{32\left(-\frac{127}{128}\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{127}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{127}{4}\frac{2}{1} = \frac{127}{2}$$

Vale observar que somatórios e produtórios também são tipos de sequências infinitas!

TEMA 4 – RELAÇÕES RECURSIVAS

No decorrer desta aula, deparamo-nos com sequências, somatórios, produtórios e fórmulas de vários tipos. Muitas das fórmulas tinham algum tipo de dependência, de certo valor inteiro ou de valores anteriores ou posteriores àqueles que gostaríamos de encontrar o valor.

Esses tipos de sequências dizemos que são definidas recursivamente, ou seja, por intermédio de uma regra que permite calcular qualquer termo em função dos antecessores imediatos.

Exemplo: seja a sequência a_n dos números naturais ímpares, $1, 3, 5, 7 \ldots$ podemos defini-la recursivamente, como $a_{n+1} = a_n + 2$, para $n \geq 1$ e $x_1 = 1$.

Assim:

$$n = 1 \rightarrow a_1 = 1$$
$$n = 2 \rightarrow a_2 = a + 2 = 1 + 2 = 3$$
$$n = 3 \rightarrow a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5$$
$$\vdots$$

Exemplo: outra maneira de representar a mesma sequência de número é pela fórmula $a_n = 2n + 1$, entretanto, essa representação não é chamada *recorrência*, pois não depende de seu sucessor.

Exemplo: seja a sequência a_n dos números naturais pares, $0, 2, 4, 6, 8 \ldots$ podemos defini-la recursivamente, como $a_{n+1} = a_n + 2$, para $n \geq 1$e $a_1 = 0$.

Assim:

$$a_1 = 0$$
$$n = 1 \rightarrow a_2 = a_1 + 2 = 0 + 2 = 2$$
$$n = 2 \rightarrow a_3 = a_2 + 2 = 4 + 2 = 6$$
$$\vdots$$

Observe que essa fórmula de recorrência é a mesma apresentada no primeiro exemplo, a única diferença foi o ponto de partida: ao invés de começarmos por $a_1 = 1$, começamos por $a_2 = 0$.

Exemplos:

Qualquer progressão geométrica a_n, com razão q, como vimos anteriormente, pode ser definida por $a_{n+1} = q \cdot a_n$.

A sequência de Fibonacci, descrita como:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots$$

em que cada novo termo é gerado por meio da soma dos seus dois anteriores, pode ser definida pela fórmula de recorrência:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

para $n \geq 2$ e $F_0 = 0,\ F_1 = 1$.

De fato, note que:

$$n = 0:\ F_0 = 0$$
$$n = 1: F_1 = 1$$
$$n = 2:\ F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$$
$$n = 3: F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$$
$$n = 4:\ F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$$
$$n = 5: F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$$
$$\vdots$$

Os exemplos apresentados até agora são chamados de *relações de recorrência de primeira ordem*. Esse tipo de relação pode ser expresso, ou depende apenas de um termo, e esse termo da sequência é o imediatamente anterior a sequência, isto é:

a_n depende de a_{n-1}

a_{n-1} depende de a_{n-2}

$\vdots$

a_3 depende de a_2

a_2 depende de a_1

a_1 depende de a_0

Em geral, as sequências têm como primeiro termo a_0, em que esse valor é fornecido separadamente.

Observe, ainda, que de uma maneira ou outra todos os termos da sequência dependem apenas do primeiro termo a_0. Sendo assim, na maioria das fórmulas de recursividade é possível manipular essas fórmulas deixando-as apenas em função do primeiro elemento. Vejamos um exemplo a seguir.

Considere a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1}$. Nesse ponto, cada termo apresenta o dobro do termo anterior; tomando $a_1 = 3$ temos:

$$a_1 = 3$$
$$a_2 = 2a_1 = 2 \cdot 3 = 6$$
$$a_3 = 2a_2 = 2 \cdot 6 = 12$$
$$a_4 = 2a_3 = 2 \cdot 12 = 24$$
$$\vdots$$

No entanto, note que:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = 2a_1$$
$$a_3 = 2a_2 = 2(2a_1) = 2^2a_1$$
$$a_4 = 2a_3 = 2(2a_2) = 2(2^2a_1) = 2^3a_1$$
$$a_5 = 2a_4 = 2(2a_3) = 2(2^3a_1) = 2^4a_1$$
$$\vdots$$
$$a_n = 2^{n-1}a_1$$

Assim, dado um valor para n, e conhecendo a_1, podemos determinar qualquer termo da sequência.

Exemplo: dada a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} + 3$, vamos encontrar a relação que dependa apenas de a_0.

Primeiro vamos entender como a relação funciona, substituindo alguns valores para n: $(*)$

$$a_0 = a_0$$
$$a_1 = 2a_0 + 3$$
$$a_2 = 2a_1 + 3 = 2(2a_0 + 3) + 3 = 4a_0 + 6 + 3 = 4a_0 + 9$$
$$a_3 = 2a_2 + 3 = 2(4a_0 + 9) + 3 = 8a_0 + 2 \cdot 9 + 3 = 8a_0 + 18 + 3 = 8a_0 + 21$$
$$a_4 = 2a_3 + 3 = 2(8a_0 + 21) + 3 = 16a_0 + 42 + 3 = 16a_0 + 45$$

$$a_5 = 2a_4 + 3 = 2(16a_0 + 45) + 3 = 32a_0 + 90 + 3 = 32a_0 + 93$$
$$\vdots$$

Observe que o termo que acompanha a_0 é fácil de pensar em uma relação que dependa de n; veja a dedução:

$$n = 1 \to 2 = 2^1$$
$$n = 2 \to 4 = 2^2$$
$$n = 3 \to 8 = 2^3$$
$$n = 4 \to 16 = 2^4$$
$$\vdots$$
$$n = k \to 2^k$$

Assim, o termo que acompanha a_0 é dado por 2^n, seja n qual for.

Agora a parte constante parece ser um pouco mais difícil:

$$n = 1 \to 3$$
$$n = 2 \to 9$$
$$n = 3 \to 21$$
$$n = 4 \to 45$$
$$n = 5 \to 93$$

De maneira imediata, não é possível encontrar uma relação, mas, olhando com um pouco mais de cuidado, e olhando para todas as informações $(*)$ que temos, podemos perceber que:

$$n = 1 \to 3$$
$$n = 2 \to 9 = 2 \cdot 3 + 3 = (2 + 1) \cdot 3 = (2^1 + 1) \cdot 3 = (2^2 - 1) \cdot 3$$
$$n = 3 \to 21 = 18 + 3 = 2 \cdot 9 + 3 = 2 \cdot (2^2 - 1) \cdot 3 + 3 = (2^3 - 2) \cdot 3 + 3$$
$$= (2^3 - 2 + 1) \cdot 3 = (2^3 - 1) \cdot 3$$
$$n = 4 \to 45 = 42 + 3 = 2 \cdot 21 + 3 = 2[(2^3 - 1) \cdot 3] + 3 = (2^4 - 2) \cdot 3 + 3$$
$$= (2^4 - 2 + 1) \cdot 3 = (2^4 - 1) \cdot 3$$
$$n = 5 \to 93 = 90 + 3 = 2 \cdot 45 + 3 = 2[(2^4 - 1) \cdot 3] + 3 = (2^5 - 2) \cdot 3 + 3$$
$$= (2^5 - 2 + 1) \cdot 3 = (2^5 - 1) \cdot 3$$

Se continuarmos o processo, perceberemos que para um n qualquer temos a relação $(2^n - 1) \cdot 3$. Portanto, nossa relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} + 3$ pode ser reescrita como $a_n = 2^n a_0 + (2^n - 1) \cdot 3$; e, assim, dado o

passo inicial a_0 e um valor para n, podemos determinar qualquer termo da sequência, sem necessariamente saber seus antecessores.

Todas as soluções de relação de recorrência $a_n = b \cdot a_{n-1} + k$, com $b \neq 1$, podem ser reescritas como:

$$a_n = c_1 b^n \pm c_2$$

em que c_1, c_2 são números determinados na dedução. E, de fato, essa relação funciona e muito bem, como podemos ver no exemplo anterior.

Relações de recorrência desse tipo são chamadas de *recorrência aditiva simples*, pois elas têm a forma $a_n = a_{n-1} + f(n)$, em que f representa uma função qualquer que depende do índice n. A sequência do exemplo anterior, $a_n = 2a_{n-1} + 3$, é uma relação de recorrência aditiva simples.

Podemos encontrar relações de *recorrência multiplicativa simples*, em que a relação é do tipo $a_n = a_{n-1} \cdot f(n)$, em que f, novamente, representa uma função qualquer que depende do índice n.

Por exemplo, qualquer progressão geométrica é uma relação de recorrência multiplicativa.

4.1 Recorrências lineares homogêneas e não homogêneas

Dizemos que uma relação de recorrência é *linear homogênea de ordem* k se ela é da forma:

$$a_n = d_1 a_{n-1} + d_2 a_{n-2} + \cdots + d_k a_{n-k}$$

Em que k é um inteiro positivo e os coeficientes $d_1, d_2, \ldots d_k$ são números reais, dependentes de n.

E dizemos que uma relação de recorrência é *linear não homogênea*, se é uma fórmula que define o termo geral a_n como uma combinação linear de termos anteriores, com coeficientes constantes mais uma função qualquer $f(n)$. Por exemplo:

$$a_0 = c_0$$
$$a_1 = c_1$$
$$\vdots$$
$$a_{k-1} = c_{k-1}$$

$$a_n = d_1 a_{n-1} + d_2 a_{n-2} + \cdots + d_k a_{n-k} + f(n)$$

$\forall n \geq k$ em que $d_1, d_2, \ldots d_k, c_0, c_1, \ldots c_{k-1}$ são constantes, que não dependem de n.

TEMA 5 – RECORRÊNCIA LINEAR DE SEGUNDA ORDEM E POLINOMIAL

No tema anterior, introduzimos o assunto de relações de recorrência simples, que dependem apenas de uma variável. Podemos encontrar relações que dependem de mais de uma, as quais em geral são as mais comuns nas aplicações do dia a dia.

Relações de recorrência que dependem de mais de uma variável são conhecidas como *relações de recorrência de segunda ordem*, de maneira que a_n é dado em termos de a_{n-1} e a_{n-2}. E supondo que a série comece em a_0, a relação é válida para $n \geq 2$; e os valores a_0 e a_1, devem ser dados separadamente. O exemplo a seguir mostra um caso simples desse tipo de relação:

$$a_n = 5a_{n-1} + 6a_{n-2}$$

Em geral, é comum encontramos relações de recorrência de segunda ordem com coeficientes constantes escritas como:

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$$

Em que suporemos que $q \neq 0$, já que, se $q = 0$, recaímos no caso de primeira ordem.

A cada relação de recorrência de segunda ordem, com coeficientes constantes, como descrita acima, associaremos a uma equação de segundo grau, $x^2 + px + q = 0$, conhecida como *equação característica*. Encontrar as raízes da equação característica é equivalente a encontrar a solução da relação de recorrência de segunda ordem com coeficientes constantes.

Teorema: se as raízes de $x^2 + px + q = 0$ são r_1 e r_2 distintas, então, $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da relação de recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.

Demonstração: se tomarmos a solução $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, note que

$$a_{n+2} = C_1 r_1^{n+2} + C_2 r_2^{n+2}$$
$$a_{n+1} = C_1 r_1^{n+1} + C_2 r_2^{n+1}$$

se substituirmos em $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$, temos

$$(C_1 r_1^{n+2} + C_2 r_2^{n+2}) + p(C_1 r_1^{n+1} + C_2 r_2^{n+1}) + q(C_1 r_1^n + C_2 r_2^n) = 0$$
$$\Leftrightarrow C_1(r_1^{n+2} + pr_1^{n+1} + qr_1^n) + C_2(r_2^{n+2} + pr_2^{n+1} + qr_2^n) = 0$$
$$\Leftrightarrow C_1 r_1^n(r_1^2 + pr_1 + q) + C_2 r_2^n(r_2^2 + pr_2 + q) = 0$$

Mas r_1 e r_2, são raízes de $r^2 + pr + q$, então:

$$r_1^2 + pr_1 + q = 0$$
$$r_2^2 + pr_2 + q = 0$$

Logo,

$$C_1 r_1^n(0) + C_2 r_2^n(0) = 0$$

Portanto, $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da relação de recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$. ■

Exemplo: encontre a relação de recorrência para a seguinte equação.

$$a_{n+2} + 3a_{n+1} - 4a_n = 0$$

Dada tal equação, podemos identificar a equação característica:

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

Da qual, resolvendo por soma e produto ou pela fórmula de Bhaskara, encontramos as raízes 1 e -4. Assim de acordo com o teorema, a relação de recorrência é dada como:

$$a_n = C_1(1)^n + C_2(-4)^n$$

em que $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Agora vamos determinar C_1 e C_2:

$$a_0 = C_1 1^0 + C_2(-4)^0 \Leftrightarrow a_0 = C_1 + C_2$$
$$a_1 = C_1 1^1 + C_2(-4)^1 \Leftrightarrow a_1 = C_1 - 4C_2$$

Resolvendo para C_1e C_2 encontra-se a relação:

$$C_1 = \frac{4a_0 + a_1}{5}$$
$$C_2 = \frac{a_0 - a_1}{5}$$

Logo, a solução é dada como:

$$a_n = \frac{4a_0 + a_1}{5}(1)^n + \frac{a_0 - a_1}{5}(-4)^n$$

Assim, se dados os valos de a_0 e a_1, podemos determinar os valores da sequência seja qual for n.

Exemplo: encontre a relação de recorrência para a equação:

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$$

Reescrevendo tal equação, podemos identificar a equação característica:

$$6a_{n-2} - 5a_{n-1} + a_n = 0$$
$$\Rightarrow 6x^2 - 5x + 1 = 0$$

Da qual, resolvendo por soma e produto ou pela fórmula de Bhaskara, encontramos as raízes 2 e 3. Assim, de acordo com o teorema, a relação de recorrência é dada como:

$$a_n = C_1(2)^n + C_2(3)^n$$

em que $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Determinando C_1 e C_2:

$$a_0 = C_1 2^0 + C_2 3^0 \Leftrightarrow a_0 = C_1 + C_2$$
$$a_1 = C_1 2^1 + C_2 3^1 \Leftrightarrow a_1 = 2C_1 + 3C_2$$

Resolvendo para C_1e C_2, encontra-se a relação:

$$C_1 = 3a_0 - a_1$$
$$C_2 = a_1 - 2a_0$$

Logo, a solução é dada como:

$$a_n = (3a_0 - a_1)(1)^n + (a_1 - 2a_0)(-4)^n$$

Assim, se dados os valos de a_0 e a_1, podemos determinar os valores da sequência seja qual for n.

Vale destacar que estamos considerando as raízes do polinômio característico distintas. Para o caso de raízes repetidas temos o teorema:

Se as raízes de $x^2 + px + q = 0$ são r_1 e r_2 repetidas, ou seja, $r_1 = r_2 = r \neq 0$, então, $a_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$ é solução da relação recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.

Demonstração: como a raiz é repetida, então, podemos escrever o polinômio característico como $(x - r_1)(x - r_1) = x^2 - 2rx + r^2$; então a relação de recorrência correspondente é $a_{n+2} - 2ra_{n+1} + r^2 a_n = 0$.

Mostraremos que a_n satisfaz a recorrência e que C_1, C_2 podem ser escolhidas de maneira conveniente. Primeiro, vamos verificar que a solução proposta satisfaz a relação de recorrência:

$$a_{n+2} = C_1 r^{n+2} + C_2(n+2)r^{n+2}$$
$$a_{n+1} = C_1 r^{n+1} + C_2(n+1)r^{n+1}$$
$$a_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$$

Logo:

$$a_{n+2} - 2ra_{n+1} + r^2 a_n = 0$$
$$\Rightarrow C_1 r^{n+2} + C_2(n+2)r^{n+2} - 2r[C_1 r^{n+1} + C_2(n+1)r^{n+1}] + r^2[C_1 r^n + C_2 n r^n] = 0$$
$$\Leftrightarrow C_1(r^{n+2} - 2rr^{n+1} + r^2 r^n) + C_2\big((n+2)r^{n+2} - 2(n+1)rr^{n+1} + nr^2 r^n\big) = 0$$
$$\Leftrightarrow C_1(r^{n+2} - 2r^{n+2} + r^{n+2}) + C_2\big((n+2)r^{n+2} - 2(n+1)r^{n+2} + nr^{n+2}\big) = 0$$
$$\Leftrightarrow r^{n+2}(0 \cdot C_1 + 0 \cdot C_2) = 0$$

Com isso, verificamos que de fato tal solução satisfaz a relação de recorrência. Agora vamos encontrar as constantes C_1 e C_2: substituindo $n = 0$ e $n = 1$:

$$a_0 = C_1 r^0 + C_2 \cdot 0 \cdot r^0 = C_1 \Leftrightarrow a_0 = C_1$$
$$a_1 = C_1 r^1 + C_2 \cdot 1 \cdot r^1 = C_1 r + C_2 r \Leftrightarrow a_1 = a_0 r + C_2 r \Leftrightarrow C_2 = \frac{a_1 - a_0 r}{r}$$

para $r \neq 0$. E caso $r = 0$, a relação de recorrência é $a_n = 0$, ou seja, todos os valores da relação são nulos. ■

Exemplo: dada a equação característica $x^2 - 4x + 4 = 0$, encontre a relação de recorrência correspondente, considerando $a_0 = 1$ e $a_1 = 3$.

Observe que as raízes da equação característica é 2, uma raiz única. Assim, de acordo com o teorema, a relação de recorrência é dada como:

$$a_n = C_1 2^n + C_2 n 2^n$$

em que $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Determinando C_1 e C_2:

$$a_0 = C_1 \Leftrightarrow C_1 = 1$$
$$C_2 = \frac{a_1 - a_0 r}{r} \Leftrightarrow C_2 = \frac{3 - 1 \cdot 2}{2} = \frac{1}{2}$$

Logo, a solução é dada como:

$$a_n = (C_1 + C_2 n)2^n$$

$$\Leftrightarrow a_n = \left(1 + \frac{1}{2}n\right)2^n$$

Por fim, outro tipo de sequência comum de nos depararmos são as sequências geradas por polinômios. Por exemplo:

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$$

sequência essa já conhecida quando falamos sobre somatórios. Note que essa sequência é a soma dos primeiros n quadrados, também é uma representação de um polinômio de grau n.

O operador que diz se uma sequência é ou não polinomial, é o *operador de diferença*, denotado por Δa. Em que, a partir de uma sequência de números $a_0, a_1, a_2, \ldots$ formamos uma nova sequência: $a_1 - a_0, a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3 \ldots$

Exemplo: dada a sequência $a = \{0, 2, 7, 15, 26, 40, 57, \ldots\}$. A respectiva sequência Δa é dada por $\Delta a = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, \ldots\}$.

De fato, sabendo que para gerar Δa, basta tomarmos a diferença entre dois valores consecutivos então:



Dada pela diferença de dois termos consecutivos, essa nova sequência é a sequência do operador diferença, Δa, em que seu n-ésimo termo é dado por:

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$$

Se a sequência a_n for fornecida por uma expressão polinomial, então, podemos utilizar tal expressão para encontrar a fórmula geral da sequência polinomial Δa.

Exemplo, seja $a_n = n^3 - 5n + 1$, então:

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$$
$$= [(n+1)^3 - 5(n+1) + 1] - [n^3 - 5n + 1]$$
$$= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 5n - 5 + 1 - n^3 + 5n - 1$$
$$= 3n^2 + 3n - 4$$

Portanto, como Δa é uma sequência polinomial.

Note ainda que, no exemplo, a_n é um polinômio de 3º grau, e Δa_n converteu em um polinômio de 2º grau.

Proposição: seja a uma sequência de números em que a_n é fornecido por um polinômio de grau d que $d \geq 1$. Então, Δa é uma sequência fornecida por um polinômio de grau $d-1$.

Demonstração: suponha que a_n seja dado por um polinômio de grau d, então:

$$a_n = c_d n^d + c_{d-1} n^{d-1} + \cdots + c_2 n^2 + c_1 n + c_0$$

em que $c_d \neq 0$ e $d \geq 1$. Calculando Δa_n temos:

$$\begin{aligned}
&\Delta a_n = a_{n+1} - a_n \\
&= [c_d(n+1)^d + c_{d-1}(n+1)^{d-1} + \cdots + c_2(n+1)^2 + c_1(n+1) + c_0] - [c_d n^d \\
&\quad + c_{d-1} n^{d-1} + \cdots + c_2 n^2 + c_1 n + c_0] \\
&= c_d((n+1)^d - n^d) + c_{d-1}((n+1)^{d-1} - n^{d-1}) + \cdots + c_2((n+1)^2 - n^2) \\
&\quad + c_1\big((n+1) - n\big) + c_0 - c_0
\end{aligned}$$

Utilizando a definição de Binômio de Newton[1], a cada parcela $c_j\left[(n+1)^j - n^j\right]$, podemos expandir $(n+1)^j$ assim:

$$\begin{aligned}
c_j\left[(n+1)^j - n^j\right] &= c_j\left[\left\{n^j + \binom{j}{1} n^{j-1} + \binom{j}{2} n^{j-2} + \cdots + \binom{j}{j-1} n^1 + \binom{j}{j} n^0\right\} - n^j\right] \\
&= c_j\left[\binom{j}{1} n^{j-1} + \binom{j}{2} n^{j-2} + \cdots + \binom{j}{j-1} n^1 + \binom{j}{j} n^0\right]
\end{aligned}$$

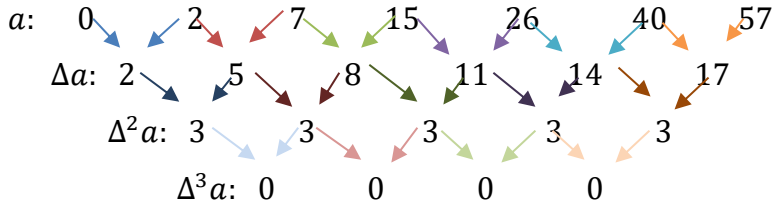
Note que a expressão acima é um polinômio de grau $j-1$, por isso toda a expressão de Δa_n com primeiro termo $c_d((n+1)^d - n^d)$, que é o termo de maior grau, tem grau $d-1$, e nenhum termo subsequente poderá anular o termo n^{d-1}. Portanto, Δa_n é um polinômio de grau $d-1$. ■

Esse operador ainda tem a propriedade que se a é uma sequência polinomial de grau d, e ao aplicarmos $d+1$ vezes o operador, ele leva à sequência nula.

[1] Binômio de Newton: método que permite desenvolver potência de binômios de qualquer ordem, por meio da fórmula:

$$(x+a)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \cdot a^p \cdot x^{n-p} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \cdot a^p \cdot x^{n-p} = \sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \cdot a^p \cdot x^{n-p}$$

Exemplo: tomando a mesma sequência anterior:



Além das propriedades: sejam a, b, c sequências e k uma constante, então

1. $\forall n, c_n = a_n + b_n \rightarrow \Delta c_n = \Delta a_n + \Delta b_n$
2. $\forall n, b_n = k a_n \rightarrow \Delta b_n = k \Delta a_n$

Propriedades essas que mostram que esse operador é linear.

Proposição: seja k um inteiro positivo e seja $\mathrm{a_n} = \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}$ para todos os $\mathrm{n} \geq 0$. Então $\Delta \mathrm{a} = \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{n-1}}$.

Demonstração: podemos encontrar a prova em Scheinerman (2016).

Proposição: sejam a e b sequências de números e seja k uma constante positiva. Suponhamos que:

- $\Delta^k a_n$ *e* $\Delta^k b_n$ sejam nulos para todos os n
- $a_0 = b_0$
- $\Delta^j a_0 = \Delta^j b_0, \quad \forall 1 \leq j \leq k$

Então, $a_n = b_n \quad \forall n$.

Demonstração: podemos encontrar a prova em Scheinerman (2016).

Teorema: sejam $a_0, a_1, a_2, \ldots$ uma sequência de números. Os termos a_n podem ser expressos como expressões polinomiais em função de n se, e somente se existir um inteiro k não negativo, de forma que, $\forall n \geq 0$, tenhamos $\Delta^{k+1} a_n = 0$. Nesse caso,

$$a_n = a_0 \binom{n}{0} + (\Delta a_0) \binom{n}{1} + (\Delta^2 a_0) \binom{n}{2} + \cdots + (\Delta^k a_0) \binom{n}{k}$$

Demonstração: podemos encontrar a prova em Scheinerman (2016).

Exemplo: voltando ao exemplo onde temos a sequência $a = \{0, 2, 7, 15, 26, 40, 57, \ldots\}$. Para encontrar a sua expressão recursiva, basta aplicarmos o teorema anterior, sendo assim, visto que $\Delta^3 a_n = 0$:

$$a: \quad 0 \qquad 2 \qquad 7 \qquad 15 \qquad 26 \qquad 40 \qquad 57$$
$$\Delta a: \quad 2 \qquad 5 \qquad 8 \qquad 11 \qquad 14 \qquad 17$$
$$\Delta^2 a: \quad 3 \qquad 3 \qquad 3 \qquad 3 \qquad 3$$
$$\Delta^3 a: \quad 0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0$$

então:

$$a_n = a_0 \binom{n}{0} + (\Delta a_0) \binom{n}{1} + (\Delta^2 a_0) \binom{n}{2}$$
$$a_n = 0 \binom{n}{0} + (2) \binom{n}{1} + (3) \binom{n}{2}$$
$$a_n = 2 \cdot \frac{n!}{1!\,(n-1)!} + 3 \cdot \frac{n!}{2!\,(n-2)!}$$
$$a_n = 2 \cdot \frac{n \cdot (n-1)!}{1 \cdot (n-1)!} + 3\ \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{2 \cdot 1(n-2)!} = 2n + \frac{3n(n-1)}{2} = \frac{n(3n+1)}{2}$$

Exemplo: seja $a_n = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots n^2$, vamos encontrar a fórmula de recorrência.

Primeiro, note que:

$$a_0 = 0$$
$$a_1 = 0^2 + 1^2 = 1$$
$$a_2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 = 0 + 1 + 4 = 5$$
$$a_3 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 0 + 1 + 4 + 9 = 14$$
$$\vdots$$

Agora, vamos calcular as diferenças sucessivas:

$$a: \quad 0 \qquad 1 \qquad 5 \qquad 14 \qquad 30 \qquad 55 \qquad 91 \quad \ldots$$
$$\Delta a: \quad 1 \qquad 4 \qquad 9 \qquad 16 \qquad 25 \qquad 36 \quad \ldots$$
$$\Delta^2 a: \quad 3 \qquad 5 \qquad 7 \qquad 9 \qquad 11 \quad \ldots$$
$$\Delta^3 a: \quad 2 \qquad 2 \qquad 2 \qquad 2 \quad \ldots$$
$$\Delta^4 a: \quad 0 \qquad 0 \qquad 0 \quad \ldots$$

Portanto,

$$a_n = a_0 \binom{n}{0} + (\Delta a_0) \binom{n}{1} + (\Delta^2 a_0) \binom{n}{2} + (\Delta^3 a_0) \binom{n}{3}$$
$$a_n = 0 \binom{n}{0} + (1) \binom{n}{1} + (3) \binom{n}{2} + (2) \binom{n}{3}$$
$$a_n = 1 \cdot \frac{n!}{1!\,(n-1)!} + 3 \cdot \frac{n!}{2!\,(n-2)!} + 2 \cdot \frac{n!}{3!\,(n-3)!}$$

$$a_n = 2 \cdot \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} + 3\,\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{2 \cdot 1(n-2)!} + 2\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)!}{3 \cdot 2 \cdot 1(n-3)!}$$

$$a_n = 2 \cdot n + 3\,\frac{n \cdot (n-1)}{2} + 2\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6}$$

$$a_n = \frac{2n^3 + 2n^2 + n}{6} = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$$

FINALIZANDO

Nesta aula, basicamente tratamos de sequências, aprendemos a manipulá-las utilizando somatório e produtório, e vimos também alguns tipos especiais de sequências, progressões e sequências recursivas.

Nas próximas aulas, veremos assuntos relacionados à análise combinatória e à probabilidade.

REFERÊNCIA

SCHEINERMAN, E. R. **Matemática discreta**: uma introdução. 3. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.