# MATEMÁTICA DISCRETA

AULA 6

Profª Thamara Petroli

## CONVERSA INICIAL

### Análise combinatória e probabilidade

Olá! No decorrer do curso, estudamos vários conceitos abstratos. E uma das principais ferramentas vistas foi o conceito de *lógica*, que utilizamos repetidamente, de maneira direta ou indireta; afirmando se uma determinada proposição ou predicado assume valor verdadeiro ou falso.

Na vida real, afirmar com certeza se um evento/fato é verdadeiro ou falso não é tão simples. Devemos considerar todas as informações que temos, sejam elas errôneas ou não  e, mesmo assim, muitas vezes somos sujeitos à falha.

A teoria de probabilidade surgiu com o mesmo objetivo que a lógica clássica, mas nos informa graus de confiança analisando os eventos analisados, nos ajudando a pensar e tomar decisões da maneira mais correta possível.

Sendo assim, esta aula vem com o objetivo de apresentar os conceitos de análise combinatória e probabilidade para a matemática discreta.

## TEMA 1 – ANÁLISE COMBINATÓRIA

A análise combinatória está diretamente ligada a problemas relacionados à contagem de conjuntos finitos, como nos exemplos vistos em aulas anteriores, assim como em problemas práticos ligados à programação.

### 1.1 Princípio da contagem

Quando falamos em princípio da contagem, estamos falando de duas ferramentas importantes na matemática: princípio aditivo e princípio multiplicativo.

Como o nome já diz, o princípio da contagem consiste em se somar ou multiplicar escolhas. Ao somarmos as escolhas, estamos utilizando o princípio aditivo, e, obviamente, ao multiplicar as escolhas estamos utilizando o princípio multiplicativo.

Formalizando o princípio aditivo, sejam $A$ e $B$ conjuntos que não possuem elementos em comum. O princípio aditivo garante que o número de elementos da união é igual ao número de elementos do conjunto $A$ somado ao número de elementos do conjunto $B$, isto é:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

sempre que $A \cap B = \emptyset$. Podemos ainda generalizar tal definição: dados os conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ onde $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$, então

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = n(A_1) + n(A_2) + \cdots + n(A_n)$$

Exemplo: você está em um restaurante e no cardápio encontram-se $4$ opções de pratos italianos e $3$ pratos brasileiros. Se você deseja fazer a sua refeição, optando pela escolha de um único prato, de quantas maneiras você pode fazê-la?

Se vamos escolher apenas $1$ prato, então, a escolha é composta por todas as opções do cardápio, ou seja, seja ela de um dos pratos italianos ou brasileiros.

Quadro 1 – Pratos a escolher

| **Pratos Italianos** | **Pratos Brasileiros** |
|---|---|
| Pizza | Feijoada |
| Tortellini à Bolonhesa | Caldinho de feijão |
| Bruschetta | Churrasco Gaúcho |
| Alcachofras Romanas | |
| *4 escolhas* | *3 escolhas* |

Vamos escolher prato italiano ***ou*** brasileiro, correspondente a $4 + 3 = 7$ escolhas.

Já o princípio multiplicativo é definido como: dados dois conjuntos $A$ e $B$, o princípio multiplicativo garante que o número de maneiras de escolher primeiro um elemento do conjunto $A$ e um segundo elemento do conjunto $B$ é igual ao número de elementos de $A$ multiplicado pelo número de elementos de $B$, ou seja,

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$$

Generalizando tal definição, temos:

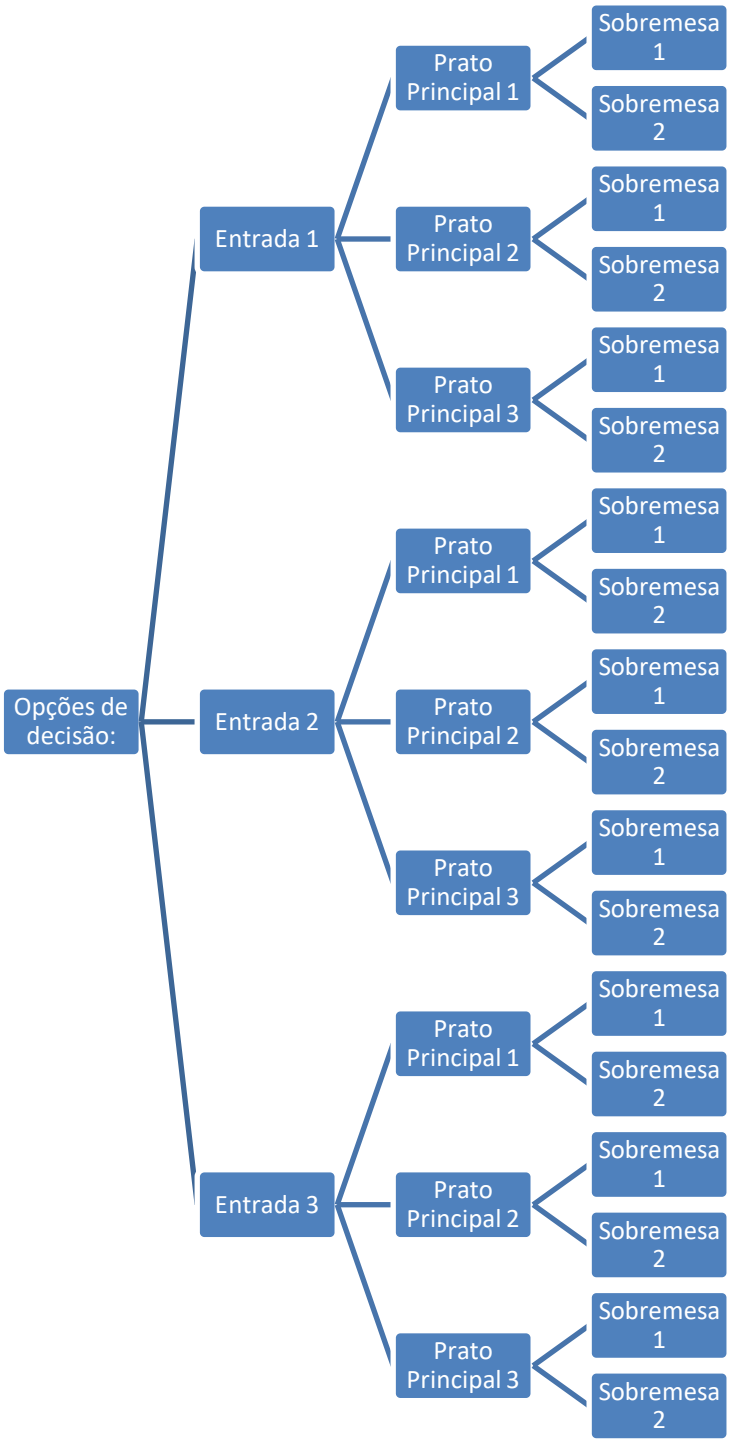
$$n(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot \dots \cdot n(A_n)$$

Exemplo: você agora está em outro restaurante e no cardápio há a sugestão de refeição composta de uma entrada + prato principal + sobremesa. Olhando para as opções de pratos de entradas, encontram-se $3$ opções de entrada, $3$ opções de prato principal e $2$ opções de sobremesa. Se você deseja

fazer a sua refeição optando pela combinação de uma entrada + prato principal + sobremesa, de quantas maneiras você poderá fazê-la?

Nesse caso, a refeição não é composta por um único prato, mas pela combinação de três deles; assim, as decisões devem ser tomadas envolvendo as três opções.

Figura 1 – Opções de decisão das refeições



Para cada escolha da entrada, existem 3 opções de prato principal, *e* para cada escolha do prato principal, temos mais 2 opções de sobremesa. Logo, são 3 escolhas da entrada, multiplicadas pelo número de opções de prato principal (3), multiplicadas pelo número de sobremesas (2), isto é, prato de entrada ***e*** prato principal ***e*** sobremesa, correspondendo a:

$$3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$$

Assim, temos 18 formas de escolher uma refeição.

Exemplo: alunos de iniciação científica devem apresentar seus trabalhos na semana acadêmica, da qual esses trabalhos serão classificados e premiados com 2 livros de disciplinas diferentes. Sabemos que existem 7 livros diferentes de Informática, 4 livros diferentes de Cálculo e 5 livros diferentes de Física. Suponhamos que o seu trabalho foi classificado e ganhou a premiação de primeiro colocado. Quantas são as opções de escolhas que você poderá fazer?

Observe que aqui vamos utilizar o princípio aditivo e multiplicativo para obter o número total de escolhas. Primeiro, observe que como devemos escolher 2 livros de matérias diferentes, então as opções são:

- Livro Informática ***e*** Matemática – pelo princípio multiplicativo:

$$n(I \times M) = 7 \cdot 4 = 28$$

- Livro Informática ***e*** Física – novamente pelo princípio multiplicativo:

$$n(I \times F) = 7 \cdot 5 = 35$$

- Livro Física ***e*** Matemática – pelo princípio multiplicativo:

$$n(F \times M) = 5 \cdot 4 = 20$$

Como devemos escolher apenas uma das três opções, então utilizamos o princípio aditivo:

(Livro Informática e Matemática) ***ou*** (Livro Informática e Física) ***ou*** (Livro Física e Matemática)

$28 + 35 + 20 = 83$ possibilidades de escolha.

## 1.2 Arranjos

Chamamos de *arranjo simples* cada uma das listas ordenadas, **sem repetição**, formada a partir da escolha de $p$ elementos de um conjunto com *n* elementos distintos.

A pergunta a ser feita que basicamente define um arranjo é: de quantas maneiras podemos escolher e ordenar $p$ objetos distintos entre $n$ distintos dados? Para escolher $p$ objetos entre os $n$ disponíveis existem:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Lembrando da definição de fatorial de um número natural como sendo:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

em que $0! = 1$.

Exemplo: considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Os arranjos formados por 3 elementos de $A$ são: $(1,2,3), (1,2,4), (1,3,2), (1,3,4), (1,4,2), (1,4,3),$ $(2,1,3), (2,1,4), (2,3,1), (2,3,4), (2,4,1), (2,4,3), (3,1,2), (3,1,4), (3,2,1), (3,2,4),$ $(3,4,1), (3,4,2), (4,1,2), (4,1,3), (4,2,1), (4,2,3), (4,3,1), (4,3,2)$.

Totalizando $24$ formas, e se utilizarmos a fórmula apresentada na definição:

$$A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 24$$

Exemplo: de quantas maneiras diferentes $7$ pessoas podem ocupar lugares em uma fila com $10$ cadeiras?

$$A_{10}^7 = \frac{10!}{(10-7)!} = \frac{10!}{3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$$
$$= 604\,800$$

## 1.3 Permutações

Permutações podem ser classificadas em dois casos: simples e com repetição.

A **permutação simples** pode ser vista como um caso particular de arranjos simples, já que aqui todos os elementos são distintos, assim, a permutação considera todas as listas ordenadas contendo todos os elementos de um conjunto.

Formalmente, definimos a permutação simples como qualquer agrupamento ordenado de $n$ objetos distintos. E a representamos como $P_n = n!$

Exemplo: determine todos os anagramas que podemos formar permutando as letras da palavra FILA.

FILA-FIAL-FALI-FAIL-FLIA-FLAI-IFLA-IFAL-ILFA-ILAF-IAFL-IALF-LFIA-LFAI-LAFI-LAIF-LIFA-LIAF-AFIL-AFLI-ALFI-ALIF-AILF-AIFL.

Contanto, temos $24$ anagramas. Agora utilizando a fórmula, temos $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Já a **permutação com repetição**, como o nome já diz, é o caso em que nem todos os elementos do conjunto são distintos, alguns, ou todos, eles apresentam repetição.

Assim definimos o número de permutações de $n$ elementos, dos quais um deles é repetido $\alpha$ vezes, outro elemento é repetido $\beta$ vezes, outro $\gamma$ vezes, ..., como:

$$P_n^{\alpha,\beta,\gamma,\dots} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\dots}$$

em que $n = \alpha + \beta + \gamma + \cdots$

Exemplo: determine todos os anagramas que podemos formar permutando as letras da palavra OSSOS.

Primeiro, note que a letra O se repete $2$ vezes e a letra S se repete $3$ vezes, assim, listando as permutações, temos:

OSSOS-OOSSS-SOOSS-SSOOS-SSSOO-SSOSO-SOSSO-OSSSO-OSOSS-SOSOS

Resultando em 10 permutações; se aplicarmos a fórmula temos:

$$P_5^{2,3} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 1 \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

## 1.4 Combinações

Como o nome já sugere, uma **combinação simples** mostra de quantas maneiras podemos escolher $p$ objetos distintos entre $n$ objetos distintos dados. Para fazer essa escolha, divide-se os $n$ elementos em um grupo de $p$ objetos que são escolhidos e em outro de $(n-p)$ que não são escolhidos. Como os $n$ objetos podem ser ordenados de $n!$ maneiras e, destas, existem $p!\,(n-p)!$ maneiras, que já foram contadas de ordenar os objetos em cada grupo, então o número de maneiras é:

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Em que se lê “combinação $n$ elementos, tomados $p$ a $p$”, ou somente, “combinação $n, p$ a $p$”. Também podemos encontrar o conceito de combinação denotado como:

$$C_n^p = \binom{n}{p}$$

Relacionada ao Triângulo de Pascal.

Exemplo: um grupo de $5$ estudantes resolve formar uma “comissão” de $2$ pessoas que ficarão encarregadas de comprar o material para a confecção de uma maquete. Qual o número total de possíveis comissões?

Se listarmos as possíveis combinações de $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ , temos então $(p_1, p_2), (p_1, p_3), (p_1, p_4), (p_1, p_5), (p_2, p_3), (p_2, p_4), (p_2, p_5), (p_3, p_4), (p_3, p_5), (p_4, p_5),$

totalizando em $10$ combinações. Utilizando a fórmula temos:

$$C_5^2 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 1 \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

Observe que no exemplo não consideramos combinações do tipo $(p_1, p_2)$ e $(p_2, p_1)$, pois, aos olhos conceituais, não estamos considerando a ordem de imposição do elemento, apenas a combinação; assim, tais combinações são as mesmas.

Podemos ainda nos deparar com casos em que devemos realizar uma combinação + permutação. Vejamos um exemplo: “em uma turma de $10$ pessoas, $3$ delas serão selecionadas para roteiros diferentes de viagens. Se existem $3$ roteiros distintos e cada uma selecionada escolhe um único roteiro distinto de outra pessoa, então, de quantas maneiras pode ocorrer a seleção?

Primeiro, devemos escolher as 3 pessoas que serão selecionadas, fazendo uma combinação $10, 3$ a $3$. Em seguida, devemos distribuir os três roteiros disponíveis, realizando a permutação. Logo

$$C_{10}^3 \cdot P_3 = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} \cdot 3! = \frac{10!}{3!\,7!} \cdot 3! = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{3!\,7!} \cdot 3! = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} \cdot 3! = 10 \cdot 9 \cdot 8$$
$$= 720$$

Obs.: caso ocorra $n < p$, definimos que a combinação $C_n^p = 0$, pois não há sentido algum de escolher mais elementos distintos dos elementos disponíveis.

## TEMA 2 – PROBABILIDADE: DEFINIÇÕES BÁSICAS

Como já mencionado, a teoria de probabilidade vem com o intuito de ajudar na tomada de decisões. Na ciência da computação, ela desenvolve um papel importante no estudo da complexidade de algoritmos. Em particular, algoritmos probabilísticos pedem ser usados para resolver problemas que não podem ser resolvidos por algoritmos determinísticos.

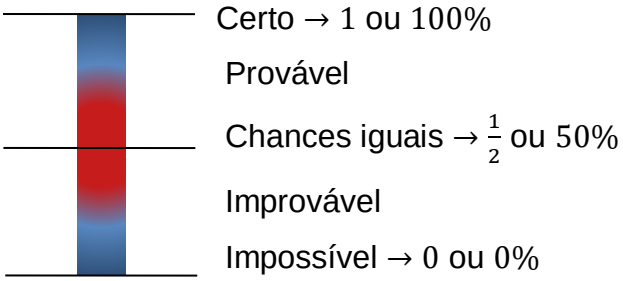
A partir deste momento vamos estudar as definições de probabilidade e suas principais ferramentas.

### 2.1 Definição

Na matemática, uma probabilidade é apenas um número associado a um objeto. Já nas aplicações, o objeto é um evento ou ação incerta, e o número é uma medida de quão frequente ou viável é esse evento.

As probabilidades são números reais entre $0$ e $1$. Um evento que tem probabilidade $1$ ou $100\%$ é um evento do qual teremos a certeza da sua ocorrência, já um evento que tem probabilidade $0$ ou $0\%$, é um evento que é impossível de ocorrer. As probabilidades entre $0$ e $1$ refletem as chances de ocorrência entre esses extremos. O esquema seguir mostra isso.

Figura 2 – Esquema de probabilidades



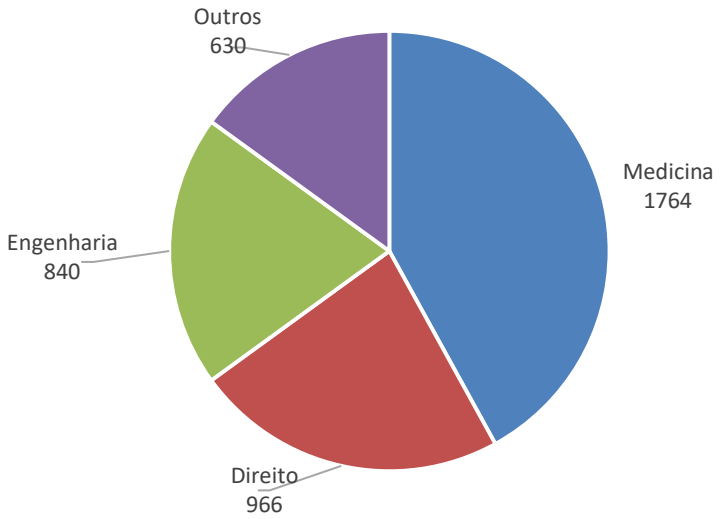

Matematicamente, definimos a probabilidade de um evento $A$ ocorrer como:

$$P(A) = \frac{número\ observado\ de\ vezes\ que\ A\ ocorreu}{número\ total\ de\ ocorrencias\ observadas}$$

Exemplo: em um curso pré-vestibular, foi realizada uma pesquisa com seus $4\,200$ alunos, com o objetivo de identificar quais cursos os alunos

pretendiam fazer. Analisando o gráfico a seguir, qual a probabilidade de um aluno realizar o curso de Engenharia?

Gráfico 1 – Probabilidade de um aluno realizar o curso de Engenharia




Utilizando a definição de probabilidade, temos que o número de ocorrência de alunos que prestarão vestibular para o curso de Engenharia é $840$. E o número total de ocorrências é o número total de alunos entrevistados, que é igual a $4\,200$.

Portanto:

$$P(E) = \frac{840}{4200} = \frac{21}{105} = \frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\%$$

Logo, a probabilidade de um aluno entrevistado cursar Engenharia é de $20\%$.

## 2.2 Espaço amostral

Um espaço amostral, denotado por $S$, consiste em um conjunto que lista todos os possíveis resultados de um experimento. Em que, para cada resultado, $s \in S$, podemos atribuir o valor da sua probabilidade de ocorrência, denotada por $P(s)$.

Formalmente, um **espaço amostral** é um par $(S, P)$, em que $S$ é um conjunto finito não vazio, e $P: S \to \mathbb{R}$, uma função de modo $P(s) \geq 0\ \forall s \in S$ e

$$\sum_{s \in S} P(s) = 1$$

Essa última condição, $\sum_{s \in S} P(s) = 1$, significa que a soma das probabilidades de todos os elementos de $S$ deve ser igual a $1$.

Exemplo: seja $S$ o conjunto de resultados da jogada de um dado. Considerando que o dado é um dado honesto, então:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Então, nosso espaço amostral é o conjunto $S$, em que $n(S) = 6$, e jogado uma vez o dado a probabilidade de que saia o número $1$ é:

$$P(1) = \frac{1}{6}$$

Assim como a probabilidade que saia o número $2$ em uma única jogada é:

$$P(2) = \frac{1}{6}$$

E esse valor será o mesmo para os outros lados do dado, *i.e.*,

$$P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

E mais, somando as probabilidades temos que:

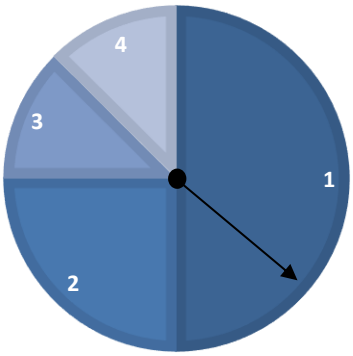
$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

Com esse exemplo podemos reescrever a definição de probabilidade como:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{número\ de\ resultados\ do\ evento\ A}{número\ de\ resultados\ do\ espaço\ amostral\ S}$$

Exemplo: considere o ponteiro abaixo. A seta representa uma agulha que pode girar em torno de um ponto até atingir uma das quatro regiões $1, 2, 3$ e $4$. Calcule $P(1), P(2), P(3)$ e $P(4)$.

Figura 3 – Ponteiro e quatro regiões




Note que nosso espaço amostral é o conjunto $S = \{1, 2, 3, 4\}$, como dado no enunciado. Olhando para a imagem, a proporção das regiões, é fácil ver que a região $1$ é maior do que as demais, que a região $2$ é maior que as regiões $3$ e $4$, e que as regiões $3$ e $4$ são iguais. Assim segue,

$$P(1) = \frac{1}{2}, P(2) = \frac{1}{4}, P(3) = P(4) = \frac{1}{8}$$

E ainda:

$$\sum P(s) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

Agora, se dado um espaço amostral $S$, chamamos de *evento* qualquer subconjunto de $A \subseteq S$. E calculamos a sua probabilidade como:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Exemplo: jogam-se dois dados. Considerando que os dados são honestos, então para cada dado existem seis possibilidades. Assim, o resultado será o par ordenado $(a, b)$, em que $a$ representa o valor do primeiro dado e $b$ o valor do segundo dado. Qual a probabilidade de que ao jogar esses dados a soma dos números $a + b = 7$?

Primeiro, note que tanto $a$ quanto $b$ podem assumir os valores $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; assim o espaço amostral se dá pela combinação desses valores, pois:

$$S = \{(a, b); a \in D \wedge b \in D\} = D \times D$$

Assim, pelo princípio multiplicativo, ou pelo método de contagem dos elementos de $S$, segue $n(S) = 6 \cdot 6 = 36$.

Segundo, nosso objeto de interesse é um evento, ou seja, um subconjunto de $S$:

$$A = \{(a, b); a + b = 7\}$$

todas as combinações das quais a soma dos valores seja igual a 7, portanto, nos restringimos aos valores:

$$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

Assim, $n(A) = 6$. Logo, a probabilidade que esse evento ocorra é

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

## 2.3 Variável aleatória

O nome *variável aleatória* nos faz pensar erroneamente que se trata de uma variável que recebe um valor qualquer, entretanto, a definição desse conceito nos fala exatamente o oposto. A maneira mais adequada de expressar a ideia de variável aleatória é associarmos a uma função $X: S \to \mathbb{R}$, em que a cada resultado do espaço amostral é designado um valor real.

Exemplo: jogada uma moeda 10 vezes, temos $S = \{Cara; Cara; Cara; Coroa; Cara, Coroa, Coroa, Cara, Coroa, Cara\}$, assim podemos dizer que $X(Cara) = 6$ e $X(Coroa) = 4$.

Formalmente, chamamos de *variável aleatória* a função definida em um espaço de probabilidade; ou seja, se $(S, P)$ é um espaço amostral, então uma variável aleatória é uma função $X: S \to V$, para $V$ um conjunto.

E se caso quiséssemos calcular a probabilidade de $X$ tomando um valor específico $\alpha$? Como em um dos exemplos vistos anteriormente, em que, jogando um par de dados, queríamos saber a probabilidade de a soma dos dados ser 7. Na resolução do exemplo calculávamos a probabilidade de um evento específico.

A outra estratégia é calcular a probabilidade de uma *variável aleatória tratada como evento*. Para isso definiríamos uma variável aleatória $X$ como a soma dos números nos dados, e faríamos a pergunta “qual a probabilidade de $X = 7$?”; traduzindo essa situação como $P(X = 7)$.

Ao utilizar a notação $P(X = 7)$, estamos particularizando a variável aleatória $X$ como um evento, no caso quando a $X = 7$, assim estamos definindo o conjunto:

$$\{s \in S: X(s) = 7\}$$

Assim:

$$P(X = 7) = P(\{s \in S: X(s) = 7\}) = P\big((1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\big) = \frac{6}{36}$$

Podemos ainda encontrar variações dessa notação, como:

$$P(X \geq 8); P(X \leq 5); P(6 \leq X \leq 10)$$

que, se reescrevermos, estaremos calculando as probabilidades de:

- $P(X \geq 8) = P(\{s \in S: X(s) \geq 8\})$

$$= P\{(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(3,6),(6,3),(4,4),(4,5),(5,4),(4,6),(6,4),$$
$$(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\} = \frac{15}{36}$$

- $P(X \leq 5) = P(\{s \in S: X(s) \leq 5\})$

$$= P\{(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,2),(2,3),(3,2),(1,4),(4,1)\} = \frac{10}{36}$$

- $P(6 \leq X \leq 10) = P(\{s \in S: 6 \leq X(s) \leq 10\})$

$$= P\{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(2,6),(6,2),(3,4),(4,3),(3,5),(5,3),(3,6),$$
$$(6,3),(4,4),(4,5),(5,4),(4,6),(6,4),(5,5)\} = \frac{18}{36}$$

## TEMA 3 – PROBABILIDADE + LÓGICA PROPOSITAL

Nas aulas anteriores, aprendemos conceitos relacionados à lógica proposicional, da qual fomos a fundo e conseguimos estudar importantes ferramentas que agora nos auxiliam a qualificar se uma proposição é verdadeira ou falsa. No início desta aula, vimos a definição de probabilidade e os conceitos básicos, em que podemos calcular a probabilidade de eventos, onde esse evento pode ser uma sentença proposicional; sendo assim, temos a necessidade das propriedades de “probabilidade + lógica proposicional” para podemos manusear as propriedades nas situações em que somente a definição não seja suficiente.

## 3.1 Distribuição uniforme

Em geral, quando olhamos para uma situação/evento qualquer, da qual temos $n$ alternativas possíveis de acontecimentos, entretanto, não temos nenhuma informação, experiência, análises parecidas, raciocínio que justifique atribuir um nível de probabilidade, é razoável que se atribua o mesmo valor a todas as alternativas, e esse valor é $\frac{1}{n}$.

Quando nos deparamos com casos como esses, dizemos que essas alternativas têm uma *distribuição uniforme* de probabilidade.

Exemplos:

- Sorteio de uma rifa; se uma rifa tem $500$ números a serem sorteados então a probabilidade de sortear um número dentre os $500$ é $\frac{1}{500}$.
- Jogar uma moeda: ao jogar a moeda e verificar se o resultado foi cara ou coroa, a probabilidade de que o resultado seja cara ou coroa é $\frac{1}{2}$.
- Jogar um dado: ao jogar um dado honesto com $6$ faces, então a probabilidade correspondente a cada lado é $\frac{1}{6}$.
- Jogo de cartas: se em um baralho honesto temos $54$ cartas, então a probabilidade de cada carta ser "pescada/sorteada" é $\frac{1}{54}$.

Observe que em vários momentos falamos *moeda honesta*, *dado honesto*, *baralho honesto*. Isso se deve ao fato de que, caso estejamos lidando com um evento em que, por exemplo, o dado não é honesto, mas viciado, deve-se atribuir probabilidades diferentes a cada número.

## 3.2 Princípio de exclusão mútua

Utilizamos o **princípio de exclusão mútua** quando dadas duas proposições $q$ e $r$, elas não podem ser verdadeiras ao mesmo tempo, em termos lógicos temos as implicações:

$$r \rightarrow \sim q \text{ ou } q \rightarrow \sim r$$

então devemos ter $P(r) + P(q) \leq 1$.

Exemplo: considere a afirmação "hoje eu estou em Curitiba" e "hoje eu estou em São Paulo". Seja qual for a informação de onde eu estou nesse momento, não faz sentido atribuir um valor a probabilidade da primeira ser $60\%$

e a segunda ser $70\%$, pois se uma delas é verdadeira, obviamente a outra será falsa.

Generalizando essa definição, se temos $q_1, q_2, \dots q_n$ proposições, mutuamente exclusivas, ou seja, $q_i \rightarrow \sim q_j \ \forall i \neq j$ e $1 \leq i, j \leq n$. Então $P(q_1) + P(q_2) + \cdots + P(q_n) \leq 1$.

## 3.3 Princípio de exaustão

Ao contrário do princípio da exclusão mútua, o **princípio de exaustão** trabalha com o caso em que uma das duas proposições são verdadeiras, não sendo razoável termos pouca confiabilidade nas afirmações.

Em termos lógicos, se dadas duas proposições $q$ e $r$, em que $q \vee r$ é verdadeira, então:

$$P(q) + P(r) \geq 1$$

Exemplo: considerando as afirmações "o lucro será maior que $R\$10.000$" e "o lucro será menor que $R\$20.000$", é natural pensarmos que uma das afirmações será verdadeira, assim podemos atribuir os valores de probabilidade como $1/2$ para a primeira e $3/4$ para a segunda.

Generalizando, se $q_1 \vee q_2 \vee \dots \vee q_n$ é verdadeira, então $P(q_1) + P(q_2) + \cdots + P(q_n) \geq 1$.

## 3.4 Princípio da complementaridade

Esse princípio junta os dois anteriores, em que, dadas duas afirmações e se uma tem valor lógico oposta à outra, então a soma das probabilidades deve ser $1$.

Em termos lógicos, se dadas duas proposições $q$ e $\sim q$, então

$$P(q) + P(\sim q) = 1$$

equivalentemente,

$$P(q) = 1 - P(\sim q)$$

Exemplo: se a probabilidade de "amanhã vai chover" é $\frac{3}{4}$. Então a probabilidade que "amanhã não vai chover" é $\frac{1}{4}$, já que $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$

Generalizando, se uma das afirmações $q_1, q_2, \dots, q_n$ é verdadeira, ou seja, sabendo que elas são mutuamente exclusivas, mas também que uma delas é verdadeira, então temos $P(q_1) + P(q_2) + \cdots + P(q_n) = 1$.

### 3.5 Princípio da independência

O princípio de independência diz que, se dadas duas proposições $q$ e $r$, e não sabemos de nenhuma ligação ou influência entre seus valores lógicos, então, é razoável supor que elas são independentes, portanto, calcular a probabilidade de $q \wedge r$ é equivalente a multiplicar suas probabilidades, *i.e.*,

$$P(q \wedge r) = P(q) \cdot P(r)$$

Exemplo: dois dados, um azul e um vermelho, são jogados ao mesmo tempo. Qual a probabilidade de o número do dado vermelho ser menor que $3$ e do dado azul maior que $2$?

Calculando a probabilidade para o dado vermelho:

$$P(V \leq 3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Agora para o dado azul:

$$P(A \geq 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Note os eventos não dependem um do outro, caracterizando dois eventos independentes, logo:

$$P\big((V \leq 3) \wedge (A \geq 2)\big) = P(V \leq 3) \cdot P(A \geq 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$$

## TEMA 4 – PROBABILIDADE: PROPRIEDADES

Nos modelos probabilísticos, parâmetros podem ser empregados para caracterizar sua distribuição de probabilidade. Em que dada uma distribuição pode-se associar certos parâmetros, que fornecem informações importantes para assim verificarmos a probabilidade de tal distribuição.

### 4.1 Valor esperado

Saber avaliar o ganho ou a perda que pode ocorrer tomando uma decisão de escolha é um dos principais objetivos do uso da probabilidade. O conceito de

valor esperado auxilia nessa escolha, já que ela é a soma do produto de cada probabilidade com o seu respectivo valor, ou seja, ela é o valor esperado de uma experiência se ela for repetida muitas vezes.

Formalmente, seja $X$ uma variável aleatória discreta com os valores $x_1, x_2, \dots, x_n \dots$ Seja $p(x_i) = P(X = x_i), i = 1, 2, 3 \dots, n \dots$ Então o *valor esperado*, ou esperança de $X$ é definido por:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p(x_i)$$

Exemplo: joga-se um dado e denotamos $X$ o número que aparece a cada jogada, *i.e.*, $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Qual o valor esperado de $X$?

Primeiro, note que a probabilidade é dada por uma distribuição normal, logo:

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

Portanto:

$$\mu = (X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p(x_i)$$

$$= 1 \cdot P(1) + 2 \cdot P(2) + 3 \cdot P(3) + 4 \cdot P(4) + 5 \cdot P(5) + 6 \cdot P(6)$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

O valor esperado ainda obedece às propriedades: seja $X$ uma variável aleatória e c uma constante, então:

- O valor esperado de uma constante é a própria constante:

$$E(c) = c$$

- Vale a linearidade de multiplicação por uma constante:

$$E(c \cdot X) = c \cdot E(X)$$

- Vale a linearidade de soma com uma constante:

$$E(X \pm c) = E(X) \pm c$$

- Vale a linearidade da soma de duas variáveis aleatórias $X$ e $Y$:

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(\mathrm{Y})$$

- Vale a linearidade da multiplicação:

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

## 4.2 Variância

Em muitas situações saber apenas o valor esperado de uma variável aleatória $E(X)$ não é suficiente; é preciso saber a sua variação, a dispersão dos valores da variável em relação ao valor esperado, ou seja, até que ponto é aceitável a variação do valor esperado.

Dessa maneira, definimos a *variância* de uma variável aleatória, $X$, com valor esperado $E(X)$, como:

$$Var(X) = E(X - \mu)^2$$

podemos denotar a variância como $Var(X) = \sigma$.

Exemplo: joga-se um dado e denotamos $X$ o número que aparece a cada jogada, i.e., $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Qual o valor da variância de $X$?

Visto que já calculamos a sua esperança, $\mu = E(X) = \frac{7}{2}$, então:

$$Var(X) = E[(X - \mu)^2] = E\left[\left(X - \frac{7}{2}\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \left(x_i - \frac{7}{2}\right)^2 \cdot p(x_i)$$

$$= \left(1 - \frac{7}{2}\right)^2 \cdot P(1) + \left(2 - \frac{7}{2}\right)^2 \cdot P(2) + \left(3 - \frac{7}{2}\right)^2 \cdot P(3) + \left(4 - \frac{7}{2}\right)^2 \cdot P(4)$$

$$+ \left(5 - \frac{7}{2}\right)^2 \cdot P(5) + \left(6 - \frac{7}{2}\right)^2 \cdot P(6)$$

$$= \left(-\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{25}{24} + \frac{3}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{3}{8} + \frac{25}{24} = \frac{35}{12} \sim 2{,}9167$$

Vale observar que a variância é sempre positiva $Var(X) \geq 0$.

Proposição: seja X uma variável aleatória, com valores reais. Então:

$$Var(x) = E(X^2) - E(X)^2$$

Demonstração: seja $\mu = E(X)$. Pela definição de variância:

$$Var(X) = E[(X - \mu)^2]$$

Note que podemos escrever:

$$(X - \mu)^2 = X^2 - 2\mu X + \mu^2$$

Assim:

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2] = E[X^2 - 2X\mu + \mu^2]$$

Aplicando a propriedade de linearidade da esperança:

$$= E(X^2) - 2\backslash E(X)E(\mu) + E(\mu^2)$$

Sabendo que $\mu = E(X)$, e como a esperança é um número real, então, ao calcularmos a esperança da esperança, no fundo, estamos calculando a esperança de um número real, que pelas propriedades é o próprio número, logo, $E(\mu^2) = \mu^2$; portanto:

$$= E(X^2) - 2\mu\mu + \mu^2 = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2$$
$$= E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

Exemplo: do exemplo anterior, vamos calcular a variância utilizando a proposição acima:

Sabendo que $\mu = E(X) = \frac{7}{2}$, então $E(X)^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$ e como

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Falta descobrir o valor de $E(X^2)$:

$$E(X^2) = (1)^2 \cdot \frac{1}{6} + (2)^2 \cdot \frac{1}{6} + (3)^2 \cdot \frac{1}{6} + (4)^2 \cdot \frac{1}{6} + (5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (6)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

E assim:

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{91}{6} + \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$$

Sendo a variância fruto da manipulação da esperança, então, é natural pensarmos que valem as propriedades de linearidade, e, de fato, seja $X$ uma variável aleatória e $c$ uma constante, então:

- A variância de uma constante é zero:

$$Var(c) = 0$$

- Subtraindo ou somando uma constante a variância não se altera:

$$Var(X \pm c) = Var(X)$$

- Multiplicação de uma constante:

$$Var(cX) = c^2 Var(X)$$

- Sejam $X$ e $Y$ duas variáveis aleatórias independentes, então:

$$Var(X \pm Y) = Var(X) \pm Var(Y)$$

## 4.3 Desvio padrão

O desvio padrão mede a dispersão absoluta da variável aleatória $X$, sendo expressa por meio da variância, pela fórmula:

$$D(X) = \sqrt{Var(X)}$$

## 4.4 Covariância

No conceito de probabilidade, a **covariância** de duas variáveis aleatórias $X$ e $Y$ é a medida de variabilidade conjunta dessas variáveis aleatórias. Se a covariância dessas variáveis for positiva, elas tendem a mostrar um comportamento semelhante, ou seja, se uma cresce a outra também crescerá, caso ela decresce a outra também decrescerá.

Caso a covariância seja negativa, então as variáveis tendem a ter comportamento opostos, por exemplo, se uma cresce a outra decresce.

Assim definimos, a covariância entre as variáveis aleatórias $X$ e $Y$, como:

$$Cov(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

Note que a covariância é dada pela esperança, assim, aplicando as propriedades de linearidade da esperança, temos:

$$Cov(X,Y) = E\big[\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\big] = E[XY - YE(X) - XE(Y) + E(X)E(Y)]$$
$$= E(XY) - E(Y)E(X) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Portanto, podemos reescrever a definição como:

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

E mais, caso os eventos sejam independentes, então $Cov(X,Y) = 0$.

# TEMA 5 – PROBABILIDADE CONDICIONAL E TEOREMA DE BAYES

Durante o estudo do Tema 2, vimos a definição de probabilidade e os conceitos básicos, não podemos deixar de notar que estamos sempre fazendo uma análise sobre um evento, que representamos por meio de conjuntos, sendo crucial estudarmos as propriedades de “probabilidade + conjuntos” para podemos manusear as propriedades nas situações em que somente a definição não seja suficiente.

Para isso, antes de começarmos a ver tais propriedades, é válido fazermos um rápido resumo de algumas definições vistas nas aulas anteriores, em que se tratou exclusivamente do assunto de conjuntos.

- União de conjuntos: "sejam $A$ e $B$ dois conjuntos. Dizemos que a *união* dos conjuntos $A$ e $B$, denotada por $A \cup B$, é o conjunto que contém todos os elementos que estão em $A$ *ou* em $B$, *ou* em ambos".

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

- Interseção de conjuntos: "sejam $A$ e $B$ dois conjuntos. Dizemos que a *interseção* dos conjuntos $A$ e $B$, denotada por $A \cap B$, é o conjunto que contém todos os elementos que pertencem em $A$ *e* em $B$, ou seja, apenas os elementos em comum/iguais desses conjuntos".

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

- Diferença de conjuntos: "sejam $A$ e $B$ dois conjuntos. Dizemos que a *diferença* dos conjuntos $A$ e $B$, denotada por $A - B$, é o conjunto que contém todos os elementos que estão em $A$ mas que *não* estão em $B$".

$$A \cup B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

- Complementar: "se $U$ é o conjunto universo e sejam $A$ um conjunto. Dizemos que o *complementar* do conjunto $A$, denotada por $A^C$, é a diferença do conjunto universo $U$ com o conjunto $A$."

$$A^C = U - A = \{x | x \in U \wedge x \notin A\}$$

## 5.1 Propriedades

Dado que revisamos algumas propriedades de conjuntos, seguem também algumas propriedades de probabilidade:

- Propriedade do conjunto complementar: se dado o conjunto $A$ e seu complementar $A^c$, então

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

- Regra da soma: a probabilidade de ocorrer o evento $\mathrm{A}$ ou o evento $\mathrm{B}$ é dada por

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Regra do produto: se $\mathrm{A}$ e $\mathrm{B}$ são conjuntos mutuamente exclusivos, ou seja, $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$, então

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

- Propriedade da independência: se A é um conjunto independente de B, e B também é um conjunto independente de A, então

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Observe que tais propriedades são muito parecidas quando os eventos são lógicas proposicionais e, de fato, isso não ocorre à toa! As propriedades são as mesmas, pois quando falamos de eventos, estamos falando de uma maneira geral, e o que muda é apenas a notação.

## 5.2 Probabilidade condicional

A **probabilidade condicional**, como o nome já sugere, é definida como a probabilidade de um evento ocorrer, dado que um segundo evento ocorreu.

Formalmente, sejam $A$ e $B$ eventos em um espaço amostral $(X, P)$ e suponhamos $P(B) \neq 0$. A probabilidade condicional $P(A|B)$, isto é, a probabilidade de $A$ dado $B$, é:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exemplo: jogam-se dois dados. Consideremos o evento $A$ como "os números dos dados tem soma $6$" e o evento $B$ como "os números nos dados são impares". Calcule a probabilidade de que a soma dos dados seja $7$, dado que os números sejam impares.

Queremos calcular $P(A|B)$. Mas primeiro vamos definir $A$ e $B$:

$$A = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$$
$$B = \{(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)\}$$

Note que $P(A) = \frac{5}{36}$ e $P(B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$, já que estamos trabalhando com dados honestos e uma distribuição normal.

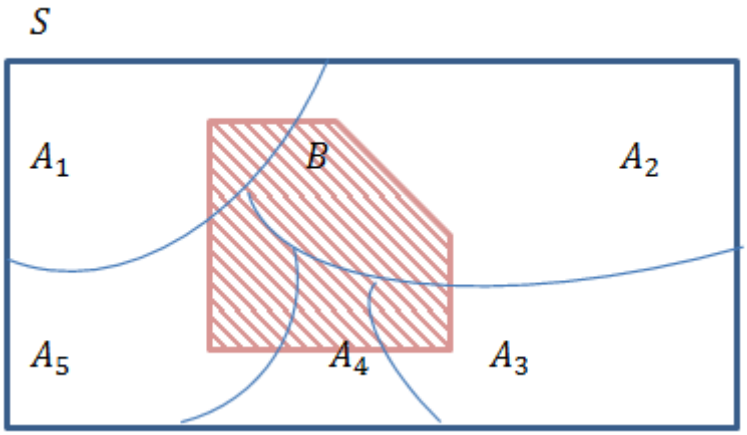
Observe ainda que $A \cap B = \{(1,5), (3,3), (5,1)\}$, então $P(A \cap B) = \frac{3}{36}$, e assim:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{9/36}{3/36} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

## 5.3 Teorema de Bayes

Considere $A_1, A_2, \dots A_n$ eventos mutuamente excludentes, cuja união representa o espaço amostral $S$, ou seja, um dos eventos necessariamente deve ocorrer, veja o exemplo da figura abaixo. Então, o teorema de Bayes diz que:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}$$




Exemplo (Studart, [S.d.]): em uma fábrica, 3 máquinas $B_1, B_2$ e $B_3$ fazem, respectivamente, $30\%, 45\%$ e $25\%$ dos produtos. Sabe-se de experiências passadas que $2\%, 3\%$ e $2\%$, respectivamente dos produtos fabricados são defeituosos. Suponha que um produto seja escolhido ao acaso e verificou-se que é defeituoso. Qual a probabilidade de ter sido fabricado pela máquina $B_2$?

Aqui vamos utilizar o teorema de Bayes para resolver. Primeiro note que:

$$P(B_1) = 30\% = 0{,}3$$
$$P(B_2) = 45\% = 0{,}45$$
$$P(B_3) = 25\% = 0{,}25$$
$$P(Def|B_1) = 2\% = 0{,}2$$
$$P(Def|B_2) = 3\% = 0{,}3$$
$$P(Def|B_3) = 2\% = 0{,}2$$

Assim, para calcular a probabilidade de a peça da máquina $B_2$ ser defeituosa é:

$$P(B_2|Def) = \frac{P(B_2) \cdot P(D|B_2)}{P(B_1) \cdot P(D|B_1) + P(B_2) \cdot P(D|B_2) + P(B_3) \cdot P(D|B_3)}$$

$$= \frac{0{,}45 \cdot 0{,}3}{0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}45 \cdot 0{,}3 + 0{,}25 \cdot 0{,}2} = \frac{0{,}135}{0{,}245} = \frac{27}{49} = 0{,}5510 = 55{,}1\%$$

Poderíamos ter calculado apenas a probabilidade de encontrar uma peça defeituosa, seja de qual for a máquina que ela veio, mas o teorema de Bayes nos ajuda a especificar a probabilidade da ocorrência de certos eventos.

Só por curiosidade, qual seria a probabilidade de encontrar uma peça defeituosa? Nesse caso, bastaria utilizar a regra do produto de uma maneira um pouco geral:

$$P(Def) = P(B_1) \cdot P(D|B_1) + P(B_2) \cdot P(D|B_2) + P(B_3) \cdot P(D|B_3)$$
$$= 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}45 \cdot 0{,}3 + 0{,}25 \cdot 0{,}2 = 0{,}245 = 24{,}5\%$$

## FINALIZANDO

Nesta aula, além de revermos conceitos de algumas aulas passadas, como conjuntos, aprendemos conceitos relacionados à análise combinatória e, principalmente, à probabilidade.

Mesmo que os assuntos que vimos não tenham sido aprofundados, aprendemos a base da matemática discreta.

Até a próxima!

## REFERÊNCIA

STUDART, T. M. de C. **Teoria das Probabilidades –** Notas de aula. Departamento de Engenharia Hidráulica e Ambiental – UFC – Universidade Federal do Ceará, [S.d.]. Disponível em: <http://www.cearidus.ufc.br/Arquivos/Prob%20e%20Estat%EDstica/Apostila/Cap%EDtulo%203_teoria%20das%20probabilidades.pdf>. Acesso em: 19 abr. 2020.