# PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

AULA 4

Prof.ª Aline Purcote

## CONVERSA INICIAL

Você já deve ter utilizado as expressões "Improvável", “Impossível” ou “Provavelmente” para demonstrar que o resultado de uma situação não é conhecido, mas que temos a noção da sua ocorrência. Segundo Castanheira (2010), o termo Probabilidade é usado de modo muito amplo na conversação diária para sugerir certo grau de incerteza sobre o que ocorreu no passado, o que ocorrerá no futuro e o que está ocorrendo no presente.

Martins (2010) comenta que a probabilidade é usada por qualquer indivíduo que toma decisão em situações de incerteza e que ela nos indicará uma medida de quão provável é a ocorrência de determinado evento. Desta forma, a probabilidade ocorre sempre que nos deparamos com situações em que não sabemos exatamente o que pode ocorrer, mas temos uma ideia dos possíveis resultados. De acordo com Walpole (2009), no estudo da Estatística, estamos interessados, basicamente, na apresentação e interpretação dos possíveis resultados que ocorrem em um estudo planejado ou em uma investigação científica.

A probabilidade pode ser utilizada em diferentes áreas, por exemplo, para verificar a probabilidade de chover em um determinado dia, a probabilidade de ganhar na loteria, probabilidade de um time ganhar um campeonato, probabilidade de certo candidato ganhar ou não uma eleição e probabilidade de um produto ser produzido com defeito.

Nesta aula vamos estudar os principais conceitos envolvendo probabilidade, como calcular a probabilidade de um evento ocorrer, a diferença entre evento exclusivo e não exclusivo além dos conceitos relacionados à probabilidade condicional e regra da multiplicação.

## TEMA 1 – PROBABILIDADE

*Probabilidade* pode ser definida como a possibilidade ou medida de ocorrência de um determinado evento definido em um espaço amostral, que está relacionado a algum experimento aleatório. Experimento Aleatório (*E*) é aquele que podemos repetir sob as mesmas condições indefinidamente e não podemos dizer qual será o resultado exato antes da sua realização, mas somos capazes de relatar os possíveis resultados. Podemos considerar como experimento aleatório o lançamento de uma moeda ou de um dado, pois

podemos realizar o lançamento várias vezes e antes do experimento conhecemos os possíveis resultados:

- Lançamento de uma moeda = cara ou coroa
- Lançamento de um dado = 1,2,3,4,5 e 6

Segundo Walpole (2009), o conjunto de todos os resultados possíveis em um experimento estatístico é chamado de Espaço Amostral e é representado pelo símbolo *S*. Cada resultado é chamado de elemento ou membro do espaço amostral, ou simplesmente um ponto amostral. Se o espaço amostral tem um número finito de elementos, podemos listar os membros separados por vírgula e colocá-los entre chaves. Vamos analisar os seguintes exemplos que demonstram o espaço amostral do lançamento de uma moeda e um dado:

- Lançamento de uma moeda: S = {cara, coroa};
- Lançamento de um dado: S = {1, 2, 3, 4, 5,6}.

Quando em um espaço amostral os pontos amostrais possuem a mesma probabilidade de ocorrência consideramos que eles são equiprováveis.

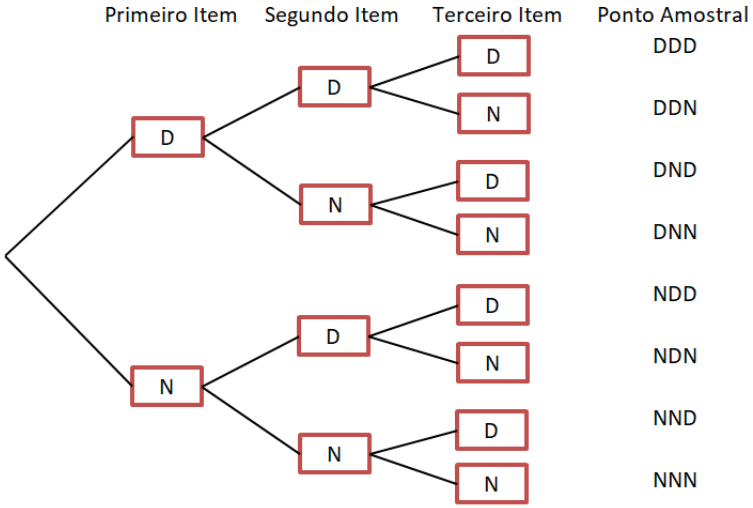
**Exemplo 1:** Considerando o lançamento de dois dados, qual o espaço amostral?

Vimos que um dado possui seis possibilidades (1,2,3,4,5,6) e agora temos o lançamento de dois dados, então podemos ter no primeiro dado o número 1 e no segundo pode aparecer de 1 até 6. Depois podemos ter no primeiro dado o número 2 e no segundo de 1 até 6, assim temos seis possibilidades no primeiro e 6 no segundo formando um espaço amostral de 36 possibilidades:

- S = { (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),
- (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),
- (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),
- (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),
- (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),
- (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

**Exemplo 2:** Considere um processo industrial e a seleção de três itens para inspeção de qualidade em que classificamos cada item como defeituoso *(D)* e não defeituoso *(N)*. Qual o espaço amostral?

Para encontrar o espaço amostral, vamos listar as possibilidades por meio de um diagrama de árvore:




Analisando o diagrama temos todas as possibilidades ao inspecionar cada item. Considerando o primeiro caminho temos que os três itens inspecionados são defeituosos (*DDD*), já no segundo caminho temos o primeiro item defeituoso, o segundo defeituoso e o último item não defeituoso *(DDN).* Desta forma o espaço amostral é composto por oito possibilidades:

- S = {DDD, DDN, DND, DNN, NDD, NDN, NND, NNN}

No cálculo da probabilidade também utilizamos o evento que é definido como qualquer conjunto de resultados de um experimento ou um subconjunto do espaço amostral indicado por qualquer letra maiúscula do alfabeto. Analisando o lançamento de um dado podemos ter vários eventos como:

A. {sair número maior que 5} = {6}
B. {sair número par} = {2,4,6}
C. {ocorrência de valor par ou ímpar} = {1,2,3,4,5,6}
D. {ocorrência de valor maior que 6} = { }

Observando os eventos anteriores, verificamos que o evento *A* é formado por apenas um elemento, desta forma, ele é definido como evento simples. Já o evento *B* é formado por três elementos assim temos um evento composto. Se analisarmos o evento C, percebemos que ele possui todos os elementos do espaço amostral logo é chamado de evento certo. Analisando o evento D ele não possui elementos, pois em um dado não temos elementos maiores que 6, desta forma chamamos de evento impossível.

Considerando o exemplo 2 podemos ter um evento *A* cujo número de defeitos é maior que 1, assim avaliamos no espaço amostral quais as possibilidades em que temos dois ou três itens com defeito formando assim o nosso evento *A*:

- S = {DDD, DDN, DND, DNN, NDD, NDN, NND, NNN}
- A = {DDD, DDN, DND, NDD}

## TEMA 2 – CÁLCULO DA PROBABILIDADE

Segundo Castanheira (2010), a probabilidade de um acontecimento é a relação entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Designamos por *S* o número de casos possíveis e por *A* o número de casos favoráveis, temos a probabilidade *P*, definida por:

$$P(A) = \frac{A}{S}$$

ou seja,

$$P(A) = \frac{\text{número de elementos do evento A}}{\text{número de elementos do espaço amostral S}}$$

Para calcular a probabilidade precisamos conhecer o espaço amostral e o evento para depois aplicarmos a fórmula. Segundo WALPOLE (2009), a probabilidade da ocorrência de um evento resultante de um experimento estatístico é avaliada por meio de um conjunto de números reais chamados pesos ou probabilidades, que variam de 0 a 1. Para todo ponto em um espaço amostral, atribuímos uma probabilidade de modo que a soma de todas as probabilidades seja 1. Quando um evento é muito provável de ocorrer a probabilidade atribuída deve ser próxima de 1 e uma probabilidade próxima de 0 é atribuída para um ponto amostral que não é provável de ocorrer. Desta forma, a probabilidade é uma fração entre 0 (zero) e 1 (um) ou, em percentual, teremos valores entre 0% e 100%. Quando a probabilidade for igual a zero (*P(A)=0*) temos um evento impossível e quando for 1 (*P(A) = 1* ou *P(A) = 100%)* teremos um evento certo.

**Exemplo 1:** Considere um lançamento de um dado e calcule as seguintes probabilidades:

a) Sair o número 5.

b) Sair um número ímpar.

c) Sair um número menor que 5.

Precisamos primeiramente encontrar o espaço amostral e o evento. Como temos o lançamento de um dado o espaço amostral será S = {1,2,3,4,5,6}, formado por 6 elementos. Agora vamos encontrar os eventos:

a) Sair o número 5

O nosso evento será sair o número 5 e vamos chamar de evento A:

A = {5}

Temos que o evento é formado por 1 elemento, pois só temos o número 5 e o espaço amostral formado por 6 elementos S = {1,2,3,4,5,6}, assim calculamos a probabilidade:

$$P(A) = \frac{\text{número de elementos do evento A}}{\text{número de elementos do espaço amostral S}} = \frac{1}{6}$$

P(A) = 0,16667 x 100 = 16,66667 = 17%

b) Sair um número ímpar.

Queremos um número ímpar, então o evento *B* será formado pelos elementos ímpares que pode ocorrer em um lançamos de um dado:

B = {1,3,5}

Verificamos que temos no evento *B* 3 elementos, assim a probabilidade do evento B ocorrer será:

$$P(B) = \frac{\text{número de elementos do evento A}}{\text{número de elementos do espaço amostral S}} = \frac{3}{6}$$

*P(B)* = 0,5 x 100 = 50%

c) Sair um número menor que 5:

Queremos um número menor que 5, então nosso evento será:

*C* = {1,2,3,4}

O evento *C* é formado por 4 elementos, assim calculamos a probabilidade:

$$P(C) = \frac{\text{número de elementos do evento A}}{\text{número de elementos do espaço amostral S}} = \frac{4}{6}$$

*P(C)* = 0,66667 x 100 = 66,66667% = 67%

**Exemplo 2:** Considere a escolha ao acaso de números de 1 a 7, após calcule as seguintes probabilidades:

a) Saída do número 3.
b) Saída de um número par.
c) Saída de um número ímpar.
d) Saída de um número menor que 6.

Primeiramente vamos definir o nosso espaço amostral que será formado pelos números de 1 a 7, assim:

S= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

Precisamos definir os eventos para após calcular a probabilidade de ocorrência:

a) Saída do número 3:

A = {3}

$$P(A) = \frac{\text{Número de algarismos 3 existentes}}{\text{Total dos algarismos}} = \frac{1}{7}$$

P(A) = 0,14286 x 100 = 14,28571%

b) Saída de um número par:

A = {2,4,6}

$$P(A) = \frac{\text{Número de algarismos pares}}{\text{Total dos algarismos}} = \frac{3}{7}$$

P(A) = 0,42857 x 100 = 42,85714%

c) Saída de um número ímpar:

A = {1, 3, 5, 7}

$$P(A) = \frac{\text{Número de algarismos ímpares}}{} = \frac{4}{}$$

Total dos algarismos 7

P(A) = 0,57143 x 100 = 57,14286%

d) Número menor que 6:

A = {1, 2, 3, 4, 5}

$$P(A) = \frac{\text{número de algarismos menores que 6}}{\text{Total dos algarismos}} = \frac{5}{7}$$

P(A) = 0,71429 x 100 = 71,42857%

**Exemplo 3:** Uma caixa possui 6 canetas azuis, 10 vermelhas e 4 amarelas. Tirando-se uma caneta, calcule as seguintes probabilidades:

a) sair caneta azul

b) sair caneta vermelha

c) sair caneta amarela

Vamos encontrar o espaço amostral, que neste caso é o total de canetas disponíveis na caixa, assim somamos a quantidade de canetas azuis, vermelhas e amarelas.

Azuis + Vermelhas + Amarelas = 6+10+4 = 20

Agora encontramos o evento e calculamos as probabilidades:

a) Sair caneta azul:

O evento é o total de canetas que temos da cor azul, neste caso são 6, assim:

$$P(A) = \frac{6}{20} = 0,30 \times 100 = 30\%$$

b) Sair bola vermelha:

$$P(A) = \frac{10}{20} = 0,50 \times 100 = 50\%$$

c) Sair bola amarela:

$$P(A) = \frac{4}{20} = 0,20 \times 100 = 20\%$$

**Exemplo 4:** Em uma indústria foi avaliado um lote de 12 peças, no qual 4 são defeituosas. Sendo retirada uma peça, calcule:

a) A probabilidade de essa peça ser defeituosa.

b) A probabilidade de essa peça não ser defeituosa.

O espaço amostral é o total de peças, ou seja, 12 peças. Agora vamos avaliar os eventos e calcular as probabilidades solicitadas:

a) A probabilidade de essa peça ser defeituosa:

Sabemos pelo enunciamos que do total de 12 peças temos 4 defeituosas, assim:

P(A) = $\frac{4}{12}$ = 0,33333 x 100 = 33,333%

b) A probabilidade de essa peça não ser defeituosa:

Sabemos que em um total de 12 peças 4 peças defeituosas, assim conseguimos encontrar a quantidade de peças não são defeituosas, ou seja, 12 – 4 = 8 peças não defeituosas. Logo a probabilidade será:

P(A) = $\frac{8}{12}$ = 0,66667 x 100 = 66,66667%

**Exemplo 5:** Uma turma de engenharia é composta por 25 estudantes de engenharia da computação, 10 de mecânica, 10 de elétrica e 8 de engenharia civil. Se um aluno for selecionado pelo professor, determine a probabilidade do estudante escolhido ser de engenharia da computação.

Primeiro precisamos encontrar o espaço amostral que é igual ao total de alunos que temos na sala para depois avaliar o evento:

25 estudantes de engenharia da computação + 10 de mecânica + 10 de elétrica + 8 de engenharia civil = 53

Nosso evento, no caso, é composto pela quantidade de alunos que temos de engenharia da computação que é um total de 25 alunos. Agora precisamos aplicar a fórmula da probabilidade considerando número de elementos do evento igual a 25 e espaço amostral igual a 53:

$$P(A) = \frac{A}{S}$$

$$P(A) = \frac{25}{53} = 0{,}4717 = 47{,}17\%$$

## TEMA 3 – EVENTO EXCLUSIVO

Evento mutuamente exclusivo ocorre quando temos dois eventos e a ocorrência de um exclui a realização do outro, ou seja, os eventos não podem ocorrer simultaneamente. De acordo com Walpole (2009), dois eventos *A* e *B* são mutuamente exclusivos, ou disjuntos, se $A \cap B = \phi$, ou seja, se *A* e *B* não tiverem elementos em comum.

Ao analisar o lançamento de uma moeda temos os eventos "cara" e "coroa" que são mutuamente exclusivos, pois ao se realizar um deles o outro automaticamente não ocorrerá. O mesmo acontece no lançamento de um dado, se temos os eventos sair número 4 e sair o número 5, quando retiramos o número 4 automaticamente o número 5 não ocorrerá.

A probabilidade de dois eventos exclusivos ocorrer é igual à soma das probabilidades individuais, ou seja:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

**Exemplo 1:** No lançamento de um dado qual a probabilidade de tirar o número 2 ou o número 5?

Ao lançar o dado se sair o número 2 automaticamente o número 5 não ocorrerá, assim temos eventos exclusivos. Para calcular a probabilidade, vamos encontrar a probabilidade de cada evento ocorrer separadamente:

Espaço Amostral S = {1,2,3,4,5,6}

Sair número 2:

P(A) = $\frac{1}{6} = 0{,}16667 x 100 = 16{,}66667\%$

Sair número 5:

P(B) = $\frac{1}{6} = 0{,}16667 x 100 = 16{,}66667\%$

Com as probabilidades individuais aplicamos a fórmula:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$P(A \cup B) =$ 16,66667% + 16,66667% = 33,33334%

**Exemplo 2:** Uma caixa contém 5 bolas verdes, 3 brancas e 4 amarelas. Retira-se, ao acaso, uma bola da caixa. Qual é a probabilidade de sair uma bola verde ou uma bola branca?

Como não conseguimos retirar uma bola que ao mesmo tempo seja verde e branca, ou seja, não temos uma bola que tenha duas cores ao mesmo tempo, os dois eventos são mutuamente exclusivos. Assim, vamos calcular as probabilidades de cada evento ocorrer:

- Bola Verde:

P(A) = $\frac{5}{12} = 0{,}41667 x 100 = 41{,}67\%$

- Bola Branca:

P(B) = $\frac{3}{12} = 0{,}25 x 100 = 25\%$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$P(A \cup B) =$ 41,67% + 25% = 66,67% = 67%

**Exemplo 3:** Uma turma de engenharia é composta por 25 estudantes de engenharia da computação, 10 de mecânica, 10 de elétrica e 8 de engenharia civil. Se um aluno for selecionado pelo professor, determine a probabilidade do estudante escolhido ser um estudante de engenharia civil ou elétrica.

Primeiro precisamos encontrar o espaço amostral que é igual ao total de alunos que temos na sala para depois avaliar o evento:

25 estudantes de engenharia da computação + 10 de mecânica + 10 de elétrica + 8 de engenharia civil = 53

Queremos encontrar a probabilidade de o estudante ser de engenharia civil ou elétrica então encontramos a probabilidade de cada evento e após somar as probabilidades encontradas:

- Engenharia Civil:

$P(A) = \frac{A}{S}$

$P(A) = \frac{8}{53}$

- Engenharia Elétrica:

$P(A) = \frac{A}{S}$

$P(A) = \frac{10}{53}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{8}{53} + \frac{10}{53} = \frac{18}{53} = 0{,}3396 = 33{,}96\%$$

**Exemplo 4:** Em uma indústria que produz componentes eletrônicos, a cada 100 componentes produzidos, 40 tem um tempo médio de vida de 800 horas, 35 de 900 horas e 25 de 1000 horas. Selecionando ao acaso um componente, qual a probabilidade de que ele tenha um tempo médio de vida igual a:

a) 900 horas ou 1000 horas?
b) 800 horas, 900 horas ou 1000 horas?

O espaço amostral é composto por 100 componentes eletrônicos e temos dois eventos sendo o primeiro o componente durar 900 horas e o segundo durar 1000 horas, caso ocorra o primeiro evento o segundo não irá ocorrer assim temos eventos exclusivos. Precisamos encontrar a probabilidade de cada evento separado e após somamos as probabilidades:

- 900 horas: temos 35 componentes de 900 horas de um total de 100 componentes, assim:

$$P(A) = \frac{A}{S}$$

$$P(A) = \frac{35}{100}$$

- 1000 horas: temos 25 componentes de 1000 horas de um total de 100 componentes, assim:

$$P(A) = \frac{A}{S}$$

$$P(A) = \frac{25}{100}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{35}{100} + \frac{25}{100} = \frac{60}{100} = 0{,}60 = 60\%$$

b) 800 horas, 900 horas ou 1000 horas?

Agora vamos encontrar a probabilidade de um componente ter 800 horas, 900 horas e 1000 horas e após somar os valores encontrados:

- 800 horas: temos 40 componentes de 800 horas de um total de 100 componentes, assim:

$$P(A) = \frac{A}{S}$$

$$P(A) = \frac{40}{100}$$

- 900 horas:

$$P(A) = \frac{35}{100}$$

- 1000 horas:

$$P(A) = \frac{25}{100}$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{40}{100} + \frac{35}{100} + \frac{25}{100} = \frac{100}{100} = 1$$

## TEMA 4 – EVENTO NÃO EXCLUSIVO

Vimos que dois eventos são considerados mutuamente exclusivos quando a ocorrência de um exclui a realização do outro. Agora vamos estudar os eventos não exclusivos que são eventos que podem ocorrer simultaneamente.

Quando A e B são eventos não mutuamente exclusivos temos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

em que $P(A \cap B)$ é a interseção, ou seja, a probabilidade dos eventos ocorrerem simultaneamente e é calculado por:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

**Exemplo 1:** Se dois dados forem lançados, qual a probabilidade de sair o n. 4 no 1º dado e o n. 2 no 2º dado?

Como temos o lançamento de dois dados e os eventos de sair número 4 e número 2 podem ocorrer ao mesmo tempo temos eventos não exclusivos, pois pode sair o número 4 no primeiro dado e número 2 no segundo.

Para calcular a probabilidade precisamos encontrar a probabilidade de cada evento separadamente:

- Sair número 4:

S= {1,2,3,4,5,6}

A={4}

P(A) = $\frac{1}{6} = 0{,}1667$

- Sair número 2:

B={2}

P(B) = $\frac{1}{6} = 0{,}1667$

Agora calculamos a probabilidade simultânea, ou seja, $P(A \cap B)$:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

$$P(A \cap B) = 0{,}1667.0{,}1667 = 0{,}0278$$

Com as probabilidades individuais calculadas vamos encontrar a probabilidade dos dois eventos ocorrerem:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0{,}1667 + 0{,}1667 - 0{,}0278 = 0{,}3056 = 30{,}56\%$$

**Exemplo2:** Em uma disputa, a probabilidade do jogador 1 atingir o alvo é de ½ e do jogador 2 atingir 3/5. Qual a probabilidade do alvo ser atingido, se ambos atirarem?

Temos dois eventos o jogador 1 e o jogador 2 e o exercício já fornece a probabilidade do alvo ser atingido por cada jogador, assim:

- Jogador 1:

P(A) = $\frac{1}{2} = 0,5$

- Jogador 2:

P(B) = $\frac{3}{5} = 0,6$

Não temos $P(A \cap B)$, desta forma calculamos pela fórmula:

- $P(A \cap B) = P(A).P(B)$
- $P(A \cap B) = 0,5.0,6 = 0,3$

Agora calculamos a probabilidade de ocorrência dos eventos:

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = 0,5 + 0,6 - 0,3$
- $P(A \cup B) = 0,80x100 = 80\%$

**Exemplo3:** Uma pesquisa realizada indicou que as probabilidades de uma pessoa selecionada ao acaso possuir um celular, um *notebook* ou ambos são respectivamente 0,92, 0,53 e 0,48. Calcule a probabilidade de ao selecionar uma pessoa, essa possuir um celular, um *notebook*, ou ambos.

No enunciado fornece 3 valores:

- Probabilidade Celular = 0,92
- Probabilidade *Notebook* = 0,53
- Probabilidade Ambos = 0,48, ou seja, a probabilidade simultânea $P(A \cap B)$.

Como temos as três probabilidades necessárias para o cálculo, aplicamos a fórmula:

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = 0,92 + 0,53 - 0,48$
- $P(A \cup B) = 0,97x100 = 97\%$

**Exemplo 4:** Um candidato, depois de ser entrevistado por duas empresas, avalia que a probabilidade de conseguir a vaga na empresa A é de 0,8 e da empresa B é de 0,6. Por outro lado, ele imagina que a probabilidade de conseguir uma oferta nas duas empresas é de 0,5. Qual a probabilidade de que o candidato consiga uma oferta pelo menos em uma das empresas?

Como o candidato pode receber a oferta em ambas as empresas temos um evento não exclusivo, no qual:

- Probabilidade Empresa A = 0,8
- Probabilidade Empresa B = 0,6
- Ambas = 0,5

Agora vamos calcular a probabilidade utilizando a fórmula do evento não exclusivo:

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = 0{,}8 + 0{,}6 - 0{,}5$
- $P(A \cup B) = 0{,}9$

## TEMA 5 – PROBABILIDADE CONDICIONAL

Na Probabilidade Condicional temos dois eventos e calculamos a probabilidade do segundo evento ocorrer depois que o primeiro evento estiver ocorrido. De acordo com Walpole (2009), a noção de probabilidade condicional fornece a capacidade de reavaliar a ideia da probabilidade de um evento à luz de informações adicionais, ou seja, quando é sabido que outro evento ocorreu.

Segundo Castanheira (2010), dois eventos, *A e B*, de um espaço amostral *S*, denota-se por *P (A/B)* a probabilidade condicionada de ocorrer o evento *A* quando o evento *B* já tiver ocorrido. *P (A/B)* é igual à probabilidade do evento *A*, sabendo que *B* ocorreu, ou probabilidade condicional de *A* em relação a *B* e calculada pela fórmula:

- $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Ou seja,

$$P(A/B) = \frac{\text{número de casos favoráveis do evento A} \cap \text{B}}{\text{número de casos favoráveis do evento B}}$$

em que $A \cap B$ é a ocorrência simultânea, ou seja, dois eventos ocorrendo ao mesmo tempo.

**Exemplo 1**: Em um lançamento de um dado temos os eventos A {sair o número 2} e B {sair um número par}. Calcule a probabilidade de que ocorra *A*, condicionada à ocorrência do evento *B*.

Precisamos encontrar os eventos *A* e *B* e após a interseção, pois o enunciado solicita a probabilidade de ocorrer *A* condicionada a *B*.

- A= {sair o número 2} = {2}
- B= {sair um número par} = {2,4,6}

$A \cap B = \{2\}$, ou seja, o número que aparece nos dois conjuntos ao mesmo tempo.

Com os três valores aplicamos a fórmula:

$$P(A/B) = \frac{\text{número de casos favoráveis do evento A} \cap \text{B}}{\text{número de casos favoráveis do evento B}} = \frac{1}{3}$$

P(A/B) = 0,3333 x 100 = 33,33%

**Exemplo 2**: Uma urna contém 20 bolas numeradas de 1 a 20, retira-se uma bola ao acaso. Calcule a probabilidade de ocorrer um número par, dado que ocorreu um número maior que 10.

Precisamos calcular a probabilidade de sair um número par dado que ocorreu um número maior que 10, logo temos um exemplo de probabilidade condicional, pois algo já ocorreu, neste caso o número maior que 10.

Vamos encontrar os eventos *A, B* e a interseção, sendo que o *B* é o evento que já ocorreu.

- A = {sair par} = {2,4,6,8,10,12, 14, 16, 18, 20}
- B= {sair número maior que 10} = {11,12,13,14,15,16,17,18,19,20}

$$A \cap B = \{12,14,16,18,20\}$$

$$P(A/B) = \frac{\text{número de casos favoráveis do evento } A \cap B}{\text{número de casos favoráveis do evento } B} = \frac{5}{10}$$

P(A/B) = 0,5 x 100 = 50%

**Exemplo 3**: Uma empresa realizou uma pesquisa para conhecer o gênero e o *status* empregatício de um grupo de pessoas, obtendo os seguintes resultados:

| | Empregados | Desempregados | Total |
|---|---|---|---|
| Homem | 460 | 40 | 500 |
| Mulher | 140 | 260 | 400 |
| Total | 600 | 300 | 900 |

Considere que será sorteada uma pessoa para ganhar um prêmio, sendo que a pessoa escolhida esteja empregada, qual a probabilidade do escolhido ser homem?

Temos dois eventos em que um deles já ocorreu, pois sabemos que o sorteado é empregado e queremos saber a probabilidade dele ser homem. Dos 600 empregados, temos 460 homens, logo:

- $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- $P(A/B) = \frac{460}{600} = 0{,}7667 = 76{,}67\%$

Como base na definição de Probabilidade Condicional, podemos calcular a probabilidade da ocorrência simultânea de dois eventos. A probabilidade de ocorrência simultânea de dois eventos *A* e *B* são iguais ao produto da probabilidade de um deles pela probabilidade condicional do outro, ou seja,

$$P(A \cap B) = P(B).P(A/B)$$

Ao analisar um experimento podemos ter situações com reposição ou sem reposição. Quando ocorre reposição o elemento retirado é devolvido à população podendo ser escolhido novamente. Já nos experimentos em que não ocorre reposição, o elemento, uma vez escolhido, não é devolvido à população, não podendo, assim, ser escolhido novamente.

**Exemplo 1**: Retiram-se, sem reposição, duas peças de um lote de 10 peças, no qual apenas 4 são boas. Qual a probabilidade de que ambas sejam defeituosas?

Temos 4 peças boas em um total de 10 peças, assim conseguimos calcular o número de peças defeituosas: 10 – 4 = 6 peças defeituosas.

A = {1ª Defeituosa} = $\frac{6}{10}$ = 0,6

Sabendo a probabilidade de retirar a 1ª peça defeituosa, vamos calcular a probabilidade de a segunda peça também ser defeituosa. No total são 6 peças defeituosas, mas já retiramos uma sem reposição, assim sobraram 5 peças. No total tínhamos 10 peças como retiramos 1 sem reposição sobraram 9 peças. Agora calculamos a probabilidade da segunda ser defeituosa:

B = {2ª Defeituosa} = $\frac{5}{9}$ = 0,5556

Por fim vamos calcular a probabilidade simultânea, ou seja, aplicar a regra da multiplicação:

$$P(A \cap B) = P(B).P(A/B)$$

$$P(A \cap B) = 0,6.0,5556 = 0,3334x100 = 33,34\%$$

**Exemplo 2:** Em um estoque temos 9 lâmpadas, sendo que 3 são defeituosas e 6 boas. Foram escolhidas 2 lâmpadas ao acaso sucessivamente sem reposição, calcule a probabilidade de ambas serem boas.

- A = {1ª Boa} = $\frac{6}{9}$ = 0,6667
- B = {2ª Boa} = $\frac{5}{8}$ =0,6250

Como o enunciado considera o experimento sem reposição descontamos uma peça na segunda retirada. Agora vamos aplicar a regra da multiplicação:

- $P(A \cap B) = P(B).P(A/B)$
- $P(A \cap B) = 0,6667.0,6250 = 0,4167x100 = 41,67\%$

**Exemplo 3:** Uma caixa contém 100 resistores, sendo 40 de 250 ohms e 60 de 400 ohms. Dois resistores são retirados aleatoriamente da caixa, sem reposição. Ao avaliar o primeiro resistor retirado constatamos que ele é de 250 ohms. Qual a probabilidade de que o outro resistor seja de:

a) 400 ohms
b) 250 ohms

Conforme o enunciado consideramos que foi retirado primeiro um resistor de 250 ohms e que não houve reposição. Com esta informação vamos calcular a probabilidade do outro resistor retirado ser de 400 ohms:

a) 400 ohms

Temos 60 resistores de 400 ohms em um total de 99 resistores, pois um resistor foi retirado, assim a probabilidade de ele ser de 400 ohms será:

$$\frac{60}{99} = 0{,}6061 = 60{,}61\%$$

b) 250 ohms

Temos 39 resistores de 250 ohms em um total de 99 resistores, pois um resistor de 250 ohms foi retirado, logo a probabilidade de ele ser de 200 ohms será:

$$\frac{39}{99} = 0{,}3939 = 39{,}39\%$$

**Exemplo 4:** Retirando, sem reposição, 3 bolas de uma caixa com 10 bolas brancas e 5 pretas, calcule a probabilidade de tirar 1ª bola branca, 2ª preta e 3ª branca.

Considerando que o experimento ocorre sem reposição, calculamos a probabilidade da retirada de cada bola separada, após calculamos a probabilidade de ocorrência simultânea aplicando a regra da multiplicação:

1ª branca $= \frac{10}{15} = 0{,}6667$

2ª preta $= \frac{5}{14} = 0{,}3571$

3ª branca $= \frac{9}{13} = 0{,}6923$

$$= 0{,}6667 x 0{,}3571 x 0{,}6923 = 0{,}1648 x 100 = 16{,}48\%$$

## FINALIZANDO

Nesta aula, apresentamos os principais conceitos da Probabilidade como espaço amostral, evento e a fórmula para calcular a probabilidade de um evento ocorrer. Vimos também à diferença entre Evento Exclusivo e Não exclusivo, as definições e cálculo da Probabilidade Condicional encerrando com as definições e cálculo da Regra da Multiplicação.

## REFERÊNCIAS

CASTANHEIRA, N. P. **Estatística Aplicada a Todos os Níveis**. Curitiba: InterSaberes, 2012.

MARTINS, G. de A. **Estatística geral e aplicada**. 3. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

WALPOLE, R. E.; MYERS, R. H.; MYERS, S. L.; YE, K. **Probabilidade e estatística para engenharia e ciências**. São Paulo: Pearson, 2009.